Økonomi 1

Foråret 2001, hjemmeopgave 1

Opgave 1: Mikro

Osvaldos præferencer er repræsenteret ved nyttefunktionen $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ defineret ved:

$$u(c, c') \;=\; \ln c + \delta \ln c'$$

hvor $\delta > 0$. $p, p' > 0$ er priserne og $m > 0$ er Osvaldos indkomst.

1.1 Antag at $\delta < 1$ og at Osvaldo kan vælge mellem varebundterne $(5, 3)$ og $(3, 5)$. Hvilket varebundt vælger Osvaldo?

1.2 Opstil og løs Osvaldos problem. Hvad er Osvaldos forbrug for $p = 1.25$, $p' = 1$ og $m = 31,25$?

1.3 Afgør om goderne er normale eller inferiører, ordinærer eller Giffen og substitutter eller komplementer.

Efter at have hængt ud med Osvaldo på cafeen *Det Gamle Spruthus* har vi fundet ud af forskelligt om Osvaldos situation: 1. Osvaldo lever kun på 2 tidspunkter, nemlig i dag og i fremtiden; 2. det første gode er forbrug i dag, og det andet gode er forbrug i fremtiden; 3. Osvaldos indkomst er løn og Osvaldo arbejder kun idag (hvor han er ung), og ikke i fremtiden (hvor han er for gammel); Osvaldo har 1 enhed arbejdskraft i dag og lønnen er $w > 0$ og; 5. Osvaldo kan spare op fra i dag til i fremtiden til realrenten r.

1.4 Forklar at Osvaldos budgetbetingelse i dag og i fremtiden er:

$$c + \sigma \;\leq\; w \;\text{ og }\; c' \;\leq\; (1 + r)\sigma$$

hvor σ er Osvaldos opsparing og vis at de kan omskrives til

$$(1 + r)c + c' \;\leq\; (1 + r)w \;\text{ og }\; \sigma \;\leq\; w - c.$$

Tegn Osvaldos mulige forbrug for $r = 0.25$ og $w = 25$.

1.5 Forklar at Osvaldos problem er

$$\max_{c,c',s} \;\; \ln c + \delta \ln c'$$

$$\text{s.t.} \;\; \begin{cases} (1 + r)c + c' & \leq \;\; (1 + r)w \\ \sigma & \leq \;\; w - c \end{cases}$$

1.6 Løs Osvaldos problem og vis at:

$$\sigma \;=\; \frac{\delta}{1 + \delta} w.$$

(Vink: Det kan enten løses direkte ved hjælp af Lagrange eller i 2 trin: Først løses

$$\max_{c,c'} \;\; \ln c + \delta \ln c'$$

$$\text{s.t.} \;\; (1 + r)c + c' = (1 + r)w$$

ved hjælp af Lagrange – du kan eventuelt bruge din besvarelser af spørgsmål 1.2 og indsætte $p = 1 + r$, $p' = 1$ og $m = w$ – bagefter findes σ udfra $\sigma = w - c$.)

Opgave 2: Mikro

Pugliese Pasta producerer pasta i dag ved hjælp af kapital lejet i går, K, og arbejdskraft i dag, N – man kan jo selv tænke over hvordan man laver pasta uden mel. Teknologien er beskrevet ved produktionsfunktionen $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ der er defineret ved:

$$Y \;=\; F(K, N) \;=\; zK^\alpha N^{1-\alpha}$$

hvor $z > 0$ og $0 < \alpha < 1$. $1 + r > 0$ er realprisen i dag for at leje kapital fra igår til i dag og $w > 0$ er reallønnen i dag.

2.1 Vis at produktionsfunktionen har konstant skalaafkast og at $y = zk^\alpha$ hvor $y = Y/N$ og $k = K/N$.

2.2 Opstil Pugliese Pastas profitmaksimereingsproblem og vis problemet kan omskrives til:

$$\max_{k,N} N[zk^{\alpha} - (1+r)k - w]. \tag{1}$$

2.3 Find første-ordens betingelserne for profitmaksimering til (1).

2.4 Vis ved hjælp af din besvarelse af spørgsmål 2.3 at hvis (k, N) er en løsning til (1) med $N > 0$ så gælder at

$$w \;=\; (1-\alpha)y \;=\; (1-\alpha)zk^{\alpha}. \tag{2}$$

Opgave 3: Makro

Vi er nu interesserede i at finde ud af hvordan indkomsten i samfundet udvikler sig på langt sigt. Antag derfor, at Osvaldo er repræsentativ for alle forbrugerne i økonomien. Fra opgave 1 vides det, at den samlede opsparing i økonomien er $S = swN$ (altså N gange Osvaldo's opsparing), hvor $s = \delta/(1+\delta)$ er konstanten (der ligger mellem 0 og 1) der blev udledt i spørgsmål 1.6, mens N er arbejdsstyrken/befolkningens størrelse. Vi antager, at arbejdsstyrken vokser over tid, således at $N' = (1+n)N$, hvor $n > -1$. Vi betragter en lukket økonomi, hvorfor investeringerne, I, modsvarer den samlede opsparing. Endelig haves, at kapitalbeholdningen "i morgen", K', er givet ved summen af investeringerne idag, samt den ikke-nedslidte kapitalbeholdning. Hvis vi lader "d" repræsentere nedslidningsraten haves dermed:

$$K' \;=\; I + (1-d)K$$

Endelig antages det, at Pugeliese Pasta på alle måder er "repræsentativ" for virksomhederne i den betragtede økonomi. Vi vil således antage, at den aggregerede produktionfunktion er som beskrevet i opgave 2.

3.1 Vis, på baggrund af disse informationer, at udvikligen i kapitalbeholdningen per arbejder, $k = K/N$, er givet ved

$$k' = \frac{sw}{(1+n)} + \frac{(1-d)}{1+n}k.$$

3.2 Vis, ved brug af resultatet fra opgave 2, at udvikligen i kapitalbeholdningen per arbejder, $k = K/N$, er givet ved

$$k' = \frac{s(1-\alpha)zk^{\alpha}}{(1+n)} + \frac{(1-d)}{1+n}k.$$

Redegør for hvordan ovenstående ligning adskiller sig fra en standard Solow-model, som behandlet i makroopgavesæt 1.

3.3 Steady state er defineret som et k^* der opfylder ovenstående ligning, samt at $k' = k = k^*$. Illustrer' steady state i et (k, k')-diagram. Redegør formelt for at steady state, k^*, eksisterer og er entydig. Giv desuden en intuitiv begundelse for, at ligegyldig hvor økonomien starter (altså for et vilkårligt k) da ender man i k^*.

3.4 Da vi løste Osvaldo's problem antog vi, at hans nyttefunktion var logaritmisk. Dette indebærer, at opsparingskvoten bliver uafhængig af renten, r. Mere generelt kan man forestille sig, at enten indkomsteffekten eller substitutionseffekten dominerer (dvs. at opsparingskvoten, s, enten er faldende eller stigende i r). Diskuter uformelt, dvs uden brug af matematik, om en sådan ændring af modellen kunne have ændret konklusionerne fra spørgsml 3.3. (Vink: kik på (k, k')-diagrammet der er tegnet for et konstant s. Overvej hernæst hvordan r, og derigennem s, må formodes at ændres når k øges.)

3.5 Vis at steady state indkomsten per arbejder, $y^* \equiv (Y/N)^*$, er givet ved

$$y^* = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s\,(1-\alpha)}{n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(Vink: Anvend $k' = k = k^*$ i ligningen udledt i opgave 3.2 for at finde k^*. Anvend hernæst produktionfunktionen til at finde y^*).

3.6 Redegør for effekten af en stigning i befolkningsvæksten. Der ønskes en beskrivelse af udviklingen i indkomst per arbejder fra tidspunktet hvor stigningen finder sted, til økonomien igen er i steady state.

Opgave 4: Makro

I bilaget til opgaven findes data for 22 OECD landes indkomst per arbejder i 1985, samt tal for opsparingskvoten og befolkningsvæksten. Vi er nu interesseret i at konfrontere resultaterne fra opgave 3 med data fra "den virkelige verden". Vi stater med at notere os, at hvis OECD landede var i steady state i 1985, da burde vi kunne karakterisere indkomsten per arbejder, i hvert af landende, ved

$$\ln y = \frac{1}{1-\alpha}\ln z + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(1-\alpha) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+d),$$

hvilket er Solow modellens forudsigelse til steady state indkomsten (jf. ovenfor – det eneste der er sket er, at vi har taget ln på begge sider af lighedstegnet). Men passer det? Dette kan man undersøge ved at prøve at bestemme parametrene i følgende ligning ved brug af talmaterialet:

$$\ln y = c_0 + c_1 \ln s + c_2 \ln(n+d).$$

Hvis teorien er nogenlunde meningsfuld vil vi forvente at $c_1 > 0$ (da den jo teoretisk er lig $\frac{\alpha}{1-\alpha}$), samt at $c_2 < 0$ (da den jo teoretisk er lig $-\frac{\alpha}{1-\alpha}$). $c_0 = \frac{1}{1-\alpha}\ln z + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(1-\alpha)$ har vi ikke rigtigt nogen mening om. Men hvis z er tilpas stor nummerisk, da bør $c_0 > 0$.

4.1 Brug metoden beskrevet i Appendix, samt datamaterialet for de 22 OECD lande, til at finde c_0, c_1, c_2. Er fortegnene i overensstemmelse med teorien?

4.2 Brug den fundne værdi for c_1 til at bestemme hvad talmaterialet angiver at α er lig med. Passer det nogenlunde med hvad vi "normalt" antager om α's størrelse (jf. fx. makro opgavesæt 2) ?

4.3 Er alt nu fryd og gammen? Er der nogle af resultaterne der ikke er i overensstemmelse med hvad vi ville forvente? (Vink: kik på den fundne værdi for c_2 og overvej hvilken værdi vi ville have forventet). Overvej om det er rimeligt at antage at z er ens i alle landende, som antaget i spørgsmål 4.1.

Appendix

Antag at vi har T observationer af $n+1$ variable $w(t), z_1(t), \dots, z_n(t)$ og at den første variabel, w, afhænger af de sidste n variable, $z_1, \dots, z_n$. Vi antager at sammenhængen kan approximeres med en lineær funktion, altså:

$$w(t) \quad \approx \quad c_0 + c_1 z_1(t) + \ldots + c_n z_n(t).$$

Det overordnede problem er at finde $c_0, c_1, \dots, c_n$. Dette problem kan behandles i 2 trin: 1. Finde et kriterium for hvordan $c_0, c_1, \dots, c_n$ skal vælges, og; 2. bestemme eller udregne $c_0, c_1, \dots, c_n$ ud fra dette kriterium.

Det første trin er at finde et kriterium for hvordan $c_0, c_1, \dots, c_n$ skal vælges. Vi vil sige at de bedste $c_0, c_1, \dots, c_n$ er dem som lser:

$$\min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \sum_t [c_0 + c_1 z_1(t) + \ldots + c_n z_n(t) - w(t)]^2. \tag{3}$$

Så de bedste $c_0, c_1, \dots, c_n$ er altså dem som minimerer den samlede afstand mellem $w(t)$'erne og $c_0 + c_1 z_1(t) + \ldots + z_n(t)$'erne.

Det næste trin er at bestemme $c_0, c_1, \dots, c_n$, altså at finde en løsning til minimeringsproblemet (3). Ved at differentiere (3) med hensyn til $c_0, c_1, \dots, c_n$ fås følgende $n+1$ første-ordens betingelser:

$$\begin{aligned} \sum_t [c_0 + c_1 z_1(t) + \ldots + c_n z_n(t) - w(t)] &= 0 \\ \sum_t [c_0 + c_1 z_1(t) + \ldots + c_n z_n(t) - w(t)] z_1(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_t [c_0 + c_1 z_1(t) + \ldots + c_n z_n(t) - w(t)] z_n(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

hvor de ubekendte er $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Disse ligninger kan omskrives til:

$$\begin{aligned}
c_0 T + c_1 \sum_t z_1(t) + \ldots + c_n \sum_t z_n(t) &= \sum_t w(t) \\
c_0 \sum_t z_1(t) + c_1 \sum_t z_1(t) z_1(t) + \ldots + c_n \sum_t z_n(t) z_1(t) &= \sum_t w(t) z_1(t) \\
&\vdots \\
c_0 \sum_t z_n(t) + c_1 \sum_t z_1(t) z_n(t) + \ldots + c_n \sum_t z_n(t) z_n(t) &= \sum_t w(t) z_n(t)
\end{aligned}$$

Så vi har $n+1$ lineære ligninger og $n+1$ ubekendte.

Hvis

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1(1) & z_1(2) & \cdots & z_1(T) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n(1) & z_n(2) & \cdots & z_n(T) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad W = \begin{pmatrix} w(1) \\ w(2) \\ \vdots \\ w(T) \end{pmatrix}.$$

kan de omskrevne første-ordens betingelser skrives som:

$$ZZ^T \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = ZW$$

hvor Z^T er Z transponeret. Derfor er løsningen til første-ordens betingelserne (4) og dermed løsningen til minimeringsproblemet (3):

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (ZZ^T)^{-1}(ZW).$$

Regn eventuelt selv efter.

Ialt for at finde de bedste $c_0, c_1, \ldots, c_n$ skal vi altså: 1. opstille Z og W; 2. udregne ZZ^T; 3. udregne $(ZZ^T)^{-1}$ ved at invertere ZZ^T; 4. udregne ZW og endelig; 5. udregne $(ZZ^T)^{-1}(ZW)$.