Lidt supplerende køteori

(ikke pensum)

1. Lidt mere om $M/M/1$

1.1. Rate-equality. I den første note endte vi de generelle betragtninger med en hurtig gennemgang af køen $M/M/1$. Den var jo i princippet kendt i forvejen, og ikke nok med det, vi tager den lige en gang til her, men denne gang mest for at illustrere at man kan komme nemmere til en del resultater ved at udnytte generelle egenskaber. Vi har nemlig at gøre med en *fødsels- og dødsproces:* Køens tilstand er givet ved antal kunder i systemet, og det ændrer sig kun til en mere eller en mindre, hvilket gør køsystemet simpelt som anskuet som Markov process. Vi skal i denne note interessere os for denne type køsystemer.

Når vi først har indskrænket os til at se på systemer hvor man kun flytter til to nabotilstande, så er den simpleste blandt disse en der opfylder *rate-equality* princippet: Hastigheden hvormed systemet kommer ind i en bestemt tilstand er lig med hastigheden hvormed man forlader tilstanden. Dette holder jo i $M/M/1$, for ellers ville der ske ophobning omkring et bestemt kundeantal.

Hvis vi som tidligere antager at ankomster er Poisson med parameter λ og betjening Poisson med parameter μ (og at steady state løsningen med sandsynligheder p_n for tilstande $n = 0, 1, \dots$ er veldefineret), så kan vi bruge rate-equality til at finde hastigheder ind i og ud af tilstande. For tilstand 0 har vi at hastigheden ind (*sim* sandsynligheden for at køen er i tilstand 1 og går til 0 i et lille tidsinterval) er $p_1\mu$ og hastigheden ind er tilsvarende $p_0\lambda$, så vi har

$$\lambda p_0 = \mu p_1.$$

For tilstand 1 er hastigheden ind $\lambda p_0 + \mu p_2$ og hastigheden ud er $p_1(\lambda\mu)$, og for tilstand n har vi

$$\lambda p_n + \mu p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1},$$

og ved løsning får vi så det allerede kendte udtryk $p_n = (1-\rho)\rho^n$, $n = 0, 1, \dots$.

1. Nogle mål for køsystemets ydelse. Som tidligere nævnt er det meningen med analysen af køsystemer ikke blot at finde gennemsnitsmål, så som ventetid og antallet af kunder i køen, men også mål der knytter sig til fordelingen af disse størrelser og dermed giver et fingerpeg om, hvor galt det kan gå, netop fordi systemet er stokastisk.

Lad N være antal kunder i systemet (som enten venter eller bliver ekspederet), og lad W ventetiden i systemet, begge i steady state, når systemet har fungeret længe (og dermed er underkastet sandsynlighederne p_n fundet ovenfor). Vi har at

$$\mathsf{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)},$$

(der skal ofte summeres med en vis behændighed, her sætter man $\rho(1-\rho)$ udenfor summationen og bruger formlen for en uendelig kvotientrække), og man kan tilsvarende finde

$$\mathsf{E}[N^2] = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho},$$

(summationen kræver her betydelig mere opfindsomhed og overlades til en øvelse), så at vi får variansen of N til at være

$$\mathrm{Var}[N] = \mathsf{E}[N^2] - (\mathsf{E}[N])^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Det ses at variansen går mod ∞ når ρ vokser mod 1, hvilket fortæller os at et vilkårligt køsystem vil være opføre sig meget forskelligt fra middelværdien (der iøvrigt også går mod uendelig).

Bruger vi nu Little's formel, har vi at

$$\mathsf{E}[W] = \frac{\mathsf{E}[N]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Imidlertid er vi jo ikke tilfreds med den gennemsnitlige ventetid, vi vil også gerne kende fordelingerne.

Lad os indføre betegnelsen W_q for ventetid *i kø* til forskel fra den samlede ventetid W (ofte betegnet *response time* eller *sojourn time*). For at finde fordelingerne må vi vide noget om *ködisciplinen* (er det de sidst ankomne eller de først ankomne der betjenes først?) og vi antager at det er FCFS (First Come First Served, også kendt som FIFO).

Vi har at $W_q = 0$ netop når systemet er tomt ved kundens ankomst (her har vi effektivt brugt FCFS), så sandsynligheden for $W_q = 0$ er åbenbart $p_0 = 1-\rho$, eller, sagt på anden måde, sandsynligheden for, at en kunde kommer til at vente efter sin ankomst, er $\mathsf{P}\{W_q > 0\} = \rho$.

Hvis kunden finder n andre kunder i systemet, så vil ventetiden være

$$S_n = v_1' + v_2 + \cdots + v_n,$$

hvor v_1' er den resterende betjeningstid for den kunde, der netop ekspederes, og $v_2, \ldots, v_n$ er betjeningstiden for de andre ventende kunder. Heldigvis er betjeningen eksponentialfordelt, så den tid der går fra et vilkårligt stadie af en betjening og til betjeningen er slut, har samme fordeling som hele betjeningen (overvej!), og det betyder, at S_n er summen af n uafhængige eksponentialfordelte variable, og den er gammafordelt med tæthedsfunktion

$$\frac{\mu^n x^{n-1} e^{-\mu x}}{\Gamma(n)}.$$

For at finde tæthedsfunktionen $w_q(x)$ for ventetiden bruger vi at $w_q(x)dx = \mathsf{P}\{x \le W_q \le x + dx\}$ for intervallet dx meget lille, og vi har så at

$$\begin{aligned} w_q(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{x \le W_q \le x + dx | n \text{ kunder i systemet}\} \times \mathsf{P}\{n \text{ kunder i systemet}\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n x^{n-1} e^{-\mu x}}{\Gamma(n)} p^n = \mu e^{-\mu x}(1-\rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\rho x)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \mu\rho(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)x}, \end{aligned}$$

der (næsten) kan genkendes som tæthedsfunktionen for en eksponentialfordelt variabel; ialt har tætheden formen

$$w_q(x) = \begin{cases} 1-\rho & \text{for } x = 0, \\ \mu\rho(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)x} & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Det er ofte hensigtsmæssigt at bruge *Laplace transform* når man skal finde fordelinger som her. Generelt defineres Laplace transformen fra en given tæthedsfunktion f som funktionen $\mathcal{L}f$ defineret på alle reelle (og komplekse) tal ved

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathsf{E}[e^{-sx}].$$

Blandt de mange egenskaber ved Laplace transformen, der gør den nyttig, er at summer af stokastiske variable oversætter til produkter af deres Laplace transformer. For en eksponentialfordelt variabel med parameter μ (betjeningstiden i vores kømodel), får vi en Laplace transform af formen

$$\mathsf{E}[e^{-sx}] = \int_0^\infty e^{-sx}\mu e^{-\mu x}\,dx = \mu\int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\,dx = \frac{\mu}{s+\mu},$$

Det betyder at Laplace transformen for ventetid givet n kunder i systemet (som er summen af n eksponentialfordelte variable), får formen

$$w_q^*(s|n) = \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^n.$$

På samme måde som ovenfor har vi at

$$\begin{aligned} w_q^*(s) &= p_0 + \sum_{n=1}^\infty p^n w_q^*(s|n) \\ &= (1-\rho) + (1-\rho)\sum_{n=1}^\infty \rho^n \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^n \\ &= (1-\rho) + \frac{\mu\rho(1-\rho)}{s+\mu(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Indtil nu har vi blot gendannet argumentet fra før, men det smarte ved Laplace transformen er, at vi nu kan gå direkte til fordelingen for W, som jo er samlet tid i systemet, dvs. ventetid *plus* betjening, og den tilhørende Laplace transform bliver derfor

$$w^*(s) = w_q^*(s)\frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\mu(1-\rho)}{s+\mu(1-\rho)}.$$

Denne Laplace transform genkender vi umiddelbart som hørende til en eksponentialfordeling med paramter $\mu(1-\rho)$.

Der er også andre sidegevinster ved at bruge Laplace transform, f.eks. kan vi ret nemt finde fordelingernes momenter af den generelle formel (hvor den stokastiske variabel X har tæthed f og Laplace transform F)

$$\mathsf{E}[X^n] = (-1)^n F^{(n)}(0).$$

Anvendt på W_q får vi

$$\mathsf{E}[W_q] = -\frac{d}{ds}w_q^*(s)\Big|_{s=0} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

og

$$\mathsf{E}[W_q] = -\frac{d^2}{ds^2}w_q^*(s)\Big|_{s=0} = \frac{2\lambda}{\mu(\mu-\lambda)^2}.$$

Herfra får vi så variansen af W_q som

$$\mathrm{Var}[W_q] = \frac{2\lambda}{\mu(\mu-\lambda)^2} - \left(\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}\right)^2 = \frac{\rho(2-\rho)}{(\mu-\lambda)^2}.$$

2. Køsystemer med begrænset venterum; køen $M/M/1/K$

Vi tilføjer nu en lille detalje til vores køsystem, nemlig en kapacitetsgrænse, forstået således at der højest kan være N kunder i systemet. Når dette kundeantal er nået, tillades ikke flere ankomster, således at køen i tilstand K kun kan ændres i nedadgående retning.

For at finde de enkelte tilstandes sandsynlighed i steady state bruger vi *rate-equality* princippet fra tidligere. Vi har da

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ \lambda p_n + \mu p_n &= \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots, K-1, \\ \lambda p_{K-1} &= \mu p_K. \end{aligned}$$

Fra de to første ligninger får vi (som sædvanlig)

$$p_n = p_0\rho^n,\ n = 0, 1, \ldots, K-1,$$

og fra den sidste ligning har vi

$$p_K = \rho p_{K-1} = \rho(p_0\rho^{K-1}) = p_0\rho^K.$$

Vi har dermed at $p_n = p_0\rho^h$ for alle tilladte n, og vi skal så blot finde p_0 udfra betingelsen $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, hvoraf vi får at

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n\right]^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

for $\rho \neq 1$, and

$$p_0 = \frac{1}{K+1} \text{ for } \rho = 1.$$

Ialt har vi således for $\rho \neq 1$ at

$$p_n = p_0\rho^n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}},$$

som er en afkortet geometrisk fordeling.

Med begrænsningen på antallet af kunder i systemet, og den resulterende afvisning af kunder, der ikke er plads til, vil det gennemsnitlige antal kunder i systemet også blive anderledes. I specialtilfældet $\rho = 1$ fås

$$L_K = \sum_{n=0}^{K} np_n = \sum_{n=0}^{K} \frac{n}{K+1} = \frac{K}{2}.$$

I det mere interessante tilfælde hvor $\rho > 1$, har vi

$$L_K = \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} n\rho^{n-1},$$

og hvis vi bruger, at

$$\sum_{n=0}^{K} n\rho^{n-1} = \sum_{n=0}^{K} n\frac{d}{d\rho}\rho^n = \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{K}\rho^n\right) = \frac{-(1-\rho)(K+1)\rho^K + 1 - \rho^{K+1}}{(1-\rho)^2},$$

får vi

$$L_K = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}.$$

Selvom kunderne ankommer til systemet med hastighed λ, vil den effektive kundeankomst blive mindre, fordi nogle kunder afvises. Det forventede antal kunder som kommer ind i systemet pr. tidsenhed er

$$\lambda' = \lambda(1 - p_K) = \frac{\lambda(1-\rho^K)}{1-\rho^{K+1}}$$

for $\rho < 1$. Tilsvarende er udnyttelsesgraden ikke ρ men

$$b = \sum_{n=1}^{K} = (1 - p_0) = \frac{\rho(1-\rho^K)}{1-\rho^{K+1}},$$

og den forventede output hastighed bliver

$$\mu b = \mu\left[1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right] = \lambda',$$

så med passende moditikationer ser tingene ud som de gjorde uden kapacitetsbegrænsninger.

Man kan identificere M/M/1/K med en totrins cyklisk model for behandling af K emner, som cirkulerer mellem to servere I og II, som har uafhænginge eksponentielle betjeningstider med parametre μ og λ, som vist i Figur 1. Så længe der er mindre end K kunder i køen før server I vil der komme kunder fra server II, hvor tiden mellem hver ankomst er fordelt som servicetid i server II, dvs. eksponentielt med parameter λ. Når alle kunder er i I, kan der ikke komme flere. Formelt er systemet derfor det samme som en M/M/1/K kø.

I denne model har vi derfor at sandsynligheden $p(n, K-n)$ for n kunder i I og $K-n$ kunder i II er p_n fundet ovenfor, udnyttelsesgraderne er

$$\rho_1 = 1 - p_0,\ \rho_2 = 1 - p_k,\ \frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho,$$

og det forventede antal kunder i de to servere er

$$\mathsf{E}(N_1) = \sum_{n=0}^{K} np_n,\ \mathsf{E}(N_2) = K - \mathsf{E}(N_1).$$

Forventet tidsforbrug gennem hele systemet er $\dfrac{K}{\rho_1\mu} = \dfrac{K}{\rho_2\lambda}$.

3. Køen $M/M/1$ med tilstandsafhængig ankomst og betjening

Hvis processerne for ankomst og betjening ikke er karakteriseret alene ved de to parametre λ og μ, men afhænger af den aktuelle tilstand, bliver udtrykkene lidt mere komplicerede, men der sker egentlig ikke noget principielt nyt. Lad ankomst og betjening i tilstand n være givet ved parametrene λ_n og μ_n. Vi indfører som tidligere

$$p_n = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{N(t) = n\},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

og bruger rate-equality som tidligere. Det giver

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \tag{9}$$

for tilstanden $n = 0$, og for $n \geq 0$ får vi

$$(\lambda_n + \mu_n)p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}. \tag{10}$$

Ligningssystemet kan løses ved at vi omskriver (10) til

$$\lambda_n p_n - \mu_{n+1}p_{n+1} = \lambda_{n-1}p_{n-1} - \mu_n p_n$$

og så indsætter rekursivt, så at vi får

$$\lambda_n p_n - \mu_{n+1}p_{n+1} = \lambda_{n-2}p_{n-2} - \mu_{n-1}p_{n-1} = \cdots = \lambda_0 p_0 - \mu_1 p_1 = 0,$$

hvor det sidste lighedstegn følger fra (9). Det giver os at

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}p_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}p_{n-1} = \cdots = \prod_{k=0}^{h}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}p_0.$$

Vi bruger så at $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ og får at

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}}.$$

Køen $M/M/1/K$ er iøvrigt et specialtilfælde, idet den fremkommer ved at man sætter

$$\lambda_n = \begin{cases}\lambda_n = \lambda & \text{for } n = 0, 1, \ldots, K-1\\ 0 & \text{for } n = K\end{cases}$$

og $\mu_n = \mu$ for alle n.

4. Køen $M/M/c$

Vi går nu et skridt videre, idet vi antager, at der er c parallele betjeningssteder (også kaldet 'kanaler') med hver sin uafhængige og identisk eksponentialfordelte betjeningstid, med parameter μ. Vi antager, at nye kunder allokeres til ledige betjeningssteder, hvis der er sådanne. Specielt betyder det, at hvis antal kunder n er mindre end c, så er n kanaler optagne og samlet servicetid er eksponentialfordelt med parameter $n\mu$. Hvis omvendt $n \geq c$, så er alle kanaler igang og betjeningstiden er eksponentialfordelt med parameter $c\mu$.

Vi kan således analysere denne kø som en $M/M/1$ kø med tilstandsafhængige betjeningsprocesser, og det giver os helt umiddelbart et udtryk for steady-state sandsynlighederne, nemlig ved

$$p_n = \frac{\lambda^n}{(\mu)(2\mu)\cdots(n\mu)} p_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0$$

for $n = 1, \ldots, c$, og

$$p_n = \frac{\lambda^n}{[(\mu)(2\mu)\cdots(n\mu)](c\mu)^{n-c}} p_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!c^{n-c}} p_0$$

for $n = c, c+1, \ldots$. For at få sandsynlighederne udtrykt ved parametrene alene må vi bruge normaliseringsbetingelsen $\sum_{n=0}^{\infty} = 1$, hvoraf man får at

$$\frac{1}{p_0} = 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!c^{n-c}},$$

og da det sidste led i udtrykket på højre side kan skrives som

$$\frac{1}{c!c^{-c}} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n,$$

som er en konvergent kvotientrække når $\rho < 1$, får vi alt at

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}\right]^{-1}$$

(bemærk at den første sum er udvidet til også at omfatte tilfældet $n = 0$).

Vi kan nu finde sandsynligheden for at en kunde må vente efter ankomst, den er givet ved

$$C = C\left(c, \frac{\lambda}{\mu}\right) = \mathsf{P}\{N \geq c\} = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!(1-\rho} p_0 = \frac{p_c}{1-\rho}$$

kendt som *Erlang's C formel.*

Det forventede antal optagne betjeningssteder kan findes som

$$\mathsf{E}B = \sum_{n=0}^{c-1} np_n + \sum_{n=c}^{\infty} cp_n.$$

som ved efter indsættelse af formlerne for p_n reducerer til det simple udtryk (det kan checkes som øvelse)

$$\mathsf{E}B = c\frac{\lambda}{\mu} = c\rho.$$

Forventet antal betjeningssteder som ikke benyttes er dermed $\mathsf{E}I = \mathsf{E}[c - B] = c(1 - \rho)$.

5. Køsystemer med tab: Køen $M/M/c/c$

Vi antager nu om vort køsystem, at kunder, som ankommer når alle c betjeningssteder er optagne, forlader systemet uden at afvente betjening. Eksemplet på sådanne systemer er telefoncentraler med c linier, og det var netop Erlangs studie af sådanne køsystemer, som satte gang i køteorien som selvstændig disciplin. Et system med tab af kunder kaldes et (c-kanals) tabssystem (loss system).

Formelt set har vi at gøre med en sældvanlig fødsels- og dødsproces med $\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$ for $n = 0, 1, 2, \ldots, c - 1$, men med $\lambda_n = 0, \mu_n = c\mu$ for $n \geq c$. På samme måde som tidligere får vi

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}, & n = 1, \ldots, c, \\ 0, & n > c, \end{cases}$$

and

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c} \frac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right]^{-1},$$

således at vi ialt har

$$p_n = \frac{\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{c} \frac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}}, \; n = 0, 1, \ldots, c.$$

Udtrykket er kendt som *Erlangs første formel.* En kunde som ankommer til systemet er tabt, hvis alle kanaler er optagne ved ankomst, og sandsynligheden for dette er

$$p_c = \frac{\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{c} \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}},$$

kendt som *Erlangs tabsformel* (eller Erlangs B-formel, 'B' står for 'blocking'), og man bruger notationen $B(c, \lambda/\mu)$ for denne sandsynlighed.

Det forventede antal optagne betjeningssteder kan som før findes af

$$\mathsf{E}B = \sum_{n=1}^{c} n p_n = \frac{\lambda}{\mu}(1 - p_c) = \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - B\left(c, \frac{\lambda}{\mu}\right)\right],$$

og forventet antal ubenyttede betjeningssteder bliver så

$$\mathsf{E}I = \mathsf{E}[c - I] = c - \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - B\left(c, \frac{\lambda}{\mu}\right)\right].$$

6. Køsystemer med endeligt antal kunder: Køen $M/M/c/\ /m$

I mange situationer vides det, at der er et endeligt antal m af kunder; for at undgå trivielle tilfælde vil vi antage at $c \leq m$. Hver af de c betjeningssteder har samme eksponentialfordeling med parameter μ, så den samlede servicehastighed er $n\mu$ hvis n betjeningssteder er i gang, og $c\mu$, hvis alle er i gang. Hvis der er n kunder i systemet (som enten venter eller betjenes), så er der $m - n$ udenfor, og det antages at der ankommer kunder med hastighed $\lambda(m - n)$. Sådanne køsystemer kendes blandt andet fra maskinproblemer med m maskiner og c reparatører.

Vi kan som sædvanlig finde steady-state sandsynligheder fra den relevante fødsels- og dødsproces, der har parametre

$$\lambda_n = \begin{cases} (m-n)\lambda, & n = 0, 1, \ldots, m-1, \\ 0, & n \geq m, \end{cases}$$

og

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1, 2, \ldots, c-1, \\ c\mu, & n \geq c. \end{cases}$$

Hvis p_n er sandsynligheden for at der er n kunder i systemet (i steady state), så har vi trivielt at $p_n = 0$ for $n > m$. For $n = 0, 1, \ldots, c-1$ er

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(m-i)\lambda}{(i+1)\mu} p_0 \\ &= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \binom{m}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \end{aligned}$$

og for $n = c, c+1, \ldots, m$ er

$$p_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(m-i)\lambda}{(i+1)\mu} p_0 = \frac{m!}{(m-n)!} \frac{1}{c!c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

Som sædvanlig mangler vi at finde p_0 ved normaliseringsbetingelsen $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$, hvilket giver

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \binom{m}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{m} \frac{m!}{(m-n)!} \frac{1}{c!c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}.$$

Det kan vises (Bunday & Scarton, 1980), at resultaterne ovenfor holder for et vilkårligt køsystem med endeligt input og eksponentielle betjeningstider og vilkårligt fordelte ankomsttider (som skal være uafhængige og have gennemsnitlig hastighed λ), altså for et køsystem $G/M/c/\,/m$.

Referencer

Bunday, B.D. and R.E.Scarton (1980), The G/M/r machine interference model, European Journal of Operational Reseach 4, 399 – 402.