

OPGAVE 2

Figuren viser relationen mellem salget af spiritus og salget af vin sammenholdt med relationen mellem prisen på spiritus og prisen på vin i Danmark for de 22 år fra og med 1981 til og med 2002. Mere præcist betragtes

$y = \text{spiritussalg/vinsalg}$ og $x = \text{spirituspris/vinpris}$,

idet begge salgsstørrelserne er standardiseret til 100% alkoholstyrke og priserne er indekseret. Enhederne på figuren kan derfor ikke umiddelbart tillægges betydning.

På figuren ses en tendens til, at de to variable samvarierer, så relativ billig spiritus i forhold til vin hører sammen med et stort spiritussalg i forhold til vinsalg. Man kan derfor betragte en model af formen

$$y_i = \beta x_i^\gamma + e_i,$$

hvor det ud fra figuren må forventes, at enten γ eller β er negativ, så der tilpasses en aftagende funktion. Modellen, hvor fejlleddene har samme varians $\text{var}(e_i) = \sigma^2$, kaldes Model A.

I opgaven undersøges omfanget af heteroskedasticitet ved at bruge følgende udtryk for variansen

$$\text{var}(e_i) = x_i^{2\delta} \sigma^2.$$

Modellen med denne fejlledsfordeling kaldes Model B. Homoskedasticitet, dvs. Model A, svarer til værdien 0 af parameteren δ .

Det skal understreges, at disse modeller ikke afspejler den fulde sandhed om data, da der ikke er taget hensyn til ølsalg, grænsehandel og autokorrelation.

Antag nu, at der foreligger n uafhængige observationer. I Model B med heteroskedasticitet er den simultane tæthedsfunktion givet ved

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x_i^{2\delta} \sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \beta x_i^\gamma)^2}{x_i^{2\delta} \sigma^2}\right).$$

For det konkrete datamateriale estimeres parametrene β , γ og σ^2 i Model A ved PROC NLP i SAS til

$$\hat{\beta} = 0.5842 \quad \hat{\gamma} = -4.3330 \quad \hat{\sigma}^2 = 0.006493.$$

Matricen \mathbf{Q} af anden afledede af log-likelihoodfunktionen i Model B med disse parameterestimater og $\hat{\delta} = 0$ indsat, beregnes med parametrene i rækkefølgen β , γ , δ og σ^2 til

$$Q = \begin{matrix} -2331.946875 & -29.41237058 & 0.1164141485 & -21.43074996 \\ -29.41237058 & -2.865316012 & 0.2687629316 & -1.039544258 \\ 0.1164141485 & 0.2687629316 & -4.772833414 & 652.40811628 \\ -21.43074996 & -1.039544258 & 652.40811628 & -248895.9727 \end{matrix}$$

Maksimum af log likelihoodfunktionen er 23.0945.

I Model B estimeres parametrene β og γ og δ og σ^2 ved PROC NLP i SAS til

$$\hat{\beta} = 0.5879 \quad \hat{\gamma} = -3.5492 \quad \hat{\delta} = -5.3497 \quad \hat{\sigma}^2 = 0.0280 .$$

Ud fra matricen Q beregnes kovariansmatricen for disse parametre til

$$-Q^{-1} = \begin{matrix} 0.0005897652 & 0.0189493893 & -0.003667739 & 2.7954413E-6 \\ 0.0189493893 & 0.7088418507 & -0.172710273 & 0.0001375598 \\ -0.003667739 & -0.172710273 & 6.4154565219 & -0.006319592 \\ 2.7954413E-6 & 0.0001375598 & -0.006319592 & 9.8810005E-6 \end{matrix}$$

med parametrene i rækkefølgen β , γ , δ og σ^2 . Maksimum af log-likelihoodfunktionen er 30.2480.

a)

Test hypotesen om homoskedasticitet, dvs. $H_0: \delta = 0$ i Model B ved et Wald test og et likelihood ratio test.

b)

Test ved et Wald test hypotesen om, at de to eksponenter γ og δ i Model B er ens, svarende til at standardafvigelsen på fejllædet er direkte proportionalt med niveauet.

c)

Opstil log-likelihoodfunktionen i Model B og beregn scorevektoren for parameteren δ i modellen med heteroskedasticitet. Bemærk at logL kun forlanges differentieret efter δ . Husk at den afledede af z^α efter α er $z^\alpha \log(z)$

d)

Test hypotesen i spørgsmål a) ved et Lagrange Multiplikator test (også kaldet scoretest), idet scorevektorens δ -komponent som beregnet i spørgsmål c) har talværdien - 4.7126 for $\delta = 0$.

e)

Prisforholdet mellem spiritus og vin er efter afgiftsnedsættelsen for spiritus en 1. oktober 2003 ændret til $x = 0.7945$. Estimer i Model B forholdet mellem spiritus- og vinsalg $\hat{y} = \hat{\beta} x^{\hat{\gamma}}$ for denne værdi af x . Angiv hvorledes variansen i den asymptotiske fordeling af \hat{y} kan beregnes. Selve talværdien skal ikke beregnes.

