

Empiriske metoder

Opgave 2 Sommer 2002

I denne opgave betragtes den logistiske fordeling, der har tætheden

$$\frac{1}{\beta} \frac{\exp\left(-\frac{y-\alpha}{\beta}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{y-\alpha}{\beta}\right)\right)^2}$$

I denne fordeling er middelværdien og variansen givet ved (skal ikke bevises)

$$E[y] = \alpha \quad \text{og} \quad \text{var}[y] = \beta^2 \frac{\pi^2}{3} .$$

Fordelingen er symmetrisk om middelværdien α og den har tungere haler end normalfordelingen. Som en service oplyses at opgaven trods navnet "logistisk" på ingen måde omhandler logistisk regression.

a)

Opstil loglikelihoodfunktionen for n uafhængige observationer fra denne fordeling og vis at scorefunktionen er

$$q_{\alpha} : \quad + \frac{n}{\beta} - \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\frac{y_i-\alpha}{\beta}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{y_i-\alpha}{\beta}\right)}$$

$$q_{\beta} : \quad - \frac{n}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\frac{y_i-\alpha}{\beta}\right) (y_i - \alpha)}{1 + \exp\left(-\frac{y_i-\alpha}{\beta}\right)}$$

Nu betragtes et konkret datamateriale bestående af 501 procentvise daglige ændringer i dollarkursen. Sådanne data har ofte tungere haler end normalfordelingen. Ved hjælp af proc nlp i SAS estimeres α og β simultant til

$$\hat{\alpha} = -0.071 \quad \text{og} \quad \hat{\beta} = 0.364 .$$

Maksimum for loglikelihoodfunktionen er - 493.6 og matricen $-\mathbf{Q}^{-1}$ beregnes numerisk til

	alfa	beta
alfa	0.0008018649	6.0624288E-8
beta	6.0624288E-8	0.000182545

b)

Estimer variansen i fordelingen ved $\hat{\beta}^2 \frac{\pi^2}{3}$. Beregn ud fra de opgivne tal talværdien af variansen i den asymptotiske fordeling af denne estimator, idet der er tale om en funktion af maksimum likelihood estimatoren $\hat{\beta}$.

c)

Sammenlign numerisk og principielt (men ikke i formler) den asymptotiske varians på maksimum likelihood estimatoren for α med den asymptotiske varians på gennemsnittet af observationerne, der jo er en oplagt estimator for middelværdien α .

Antag nu, at middelværdien α er lig med 0, således at β er den eneste parameter i modellen. Under denne antagelse estimeres β til

$$\tilde{\beta} = 0.367$$

Maksimum for loglikelihoodfunktionen er - 496.7. Den partielle afledede efter α (q_α i spørgsmål a) er numerisk $q_\alpha = - 87.7$. Matricen $-\mathbf{Q}^{-1}$ med $\alpha = 0$ og $\tilde{\beta} = 0.367$ indsat er

	alfa	beta
alfa	0.0008272694	0.000054083
beta	0.000054083	0.0001886672

d)

Test hypotesen $H_0 : \alpha = 0$ ved et Likelihood Ratio test, ved et Wald test og ved et Lagrange Multiplikator test.