Tre teststørrelser for samme hypotese

Note til kapitel 3

I afsnit 3.1 estimeres samme hypotese ved tre forskellige teststørrelser. I resultaterne 1 - 3 nedenfor bevises, at disse tre teststørrelser er ens.

Resultat 1
Under hypotesen $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}$ estimeres parametrene ved MK metoden ved

$$\beta_0 = \beta + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T[\mathbf{A}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T]^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \; .$$

Bevis
Det skal vises at denne værdi af β minimerer $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$ under bibetingelsen $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ = a. Der gælder

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) + (\mathbf{X}\beta - \mathbf{X}\beta_0) + (\mathbf{X}\beta_0 - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \; .$$

Da

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{y}$$

og da

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H})^T\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

vil

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0) = 0$$

og

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0 - \mathbf{X}\beta) = 0 \; .$$

Derudover gælder for alle β, der opfylder bibetingelsen, at

$$(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0)^T(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0 - \mathbf{X}\beta) = (\mathbf{a} - \mathbf{A}\beta)^T[\mathbf{A}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}_0 - \beta) = 0 \; ,$$

da $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{A}\beta = \mathbf{a}$ for alle $\boldsymbol{\beta}$, der opfylder bibetingelsen.
For alle $\boldsymbol{\beta}$, der opfylder bibetingelsen, gælder derfor

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) + (\mathbf{X}\beta - \mathbf{X}\beta_0)^T(\mathbf{X}\beta - \mathbf{X}\beta_0) + (\mathbf{X}\beta_0 - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{X}\beta_0 - \mathbf{X}\beta)\ .$$

De to første led afhænger ikke af argumentet β, mens sidste led er positivt medmindre $\beta = \beta_0$, hvorved det bliver nul. Dette beviser sætningen.

Resultat 2
Om residualkvadratsummerne ved estimation uden bibetingelsen $\mathbf{A}\beta = \mathbf{a}$

$$\mathrm{RKS} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

respektive med bibetingelsen $\mathbf{A}\beta = \mathbf{a}$

$$\mathrm{RKS}(H_0) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta_0)^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta_0)$$

gælder relationen

$$\mathrm{RKS}(H_0) = \mathrm{RKS} + (\beta - \beta_0)^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}(\beta - \beta_0)$$

$$= \mathrm{RKS} + (\mathbf{a} - \mathbf{A}\beta)^T[\mathbf{A}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T]^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{A}\beta)\ .$$

Bevis
Første udtryk ses umiddelbart af sidste udtryk i beviset for resultat 1. Andet udtryk ses ved at indsætte

$$(\beta - \beta_0) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T[\mathbf{A}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T]^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{A}\beta)\ .$$

Resultat 3
F-teststørrelsen for hypotesen H_0: $\mathbf{A}\beta = \mathbf{a}$ kan skrives på tre måder

$$F = \frac{(\mathrm{RKS}(H_0) - \mathrm{RKS})/(p - q)}{\mathrm{RKS}/(n - p)}$$

$$= \frac{(\hat\beta - \hat\beta_0)^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})(\hat\beta - \hat\beta_0)/(p - q)}{\mathrm{RKS}/(n - p)}$$

$$= \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{A}\hat\beta)^T[\mathbf{A}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}^T]^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{A}\hat\beta)/(p - q)}{\mathrm{RKS}/(n - p)}\ .$$

Bevis
Dette er en direkte følge af resultat 2.

I det første udtryk i resultat 3 sammenholdes residualkvadratsummen med og uden restriktionen. I det andet udtryk sammenholdes MK estimaterne i modellerne med og uden restriktionen. I det tredje udtryk undersøges, hvor langt MK estimatet i modellen uden restriktionen er fra at opfylde restriktionen. Bemærk at der i lærebogens (3.13) mangler division med (p - q).