

Udeladelse af én observation

Note til kapitlerne 4, 5 og 6

I de følgende resultater 1 - 10 bevises en række resultater, der alle vedrører udeladelse af én observation. Derved bevises og uddybes en række resultater om standardiserede residualer og diagnosticeringsstørrelser i lærebogens kapitler 4, 5 og 6. Der gælder i øvrigt tilsvarende resultater ved udeladelse af flere observationer.

Antag at designmatricen $\mathbf{X}$ er delt på følgende måde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(n)} \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{X}_{(n)}$ er matricen bestående af de $n - 1$ første rækker i $\mathbf{X}$ mens $\mathbf{x}_n$ er den nederste række. Rækkevektoren $\mathbf{x}_n$ består altså af værdierne af de p forklarende variable for den n 'te observation.

Resultat 1

Der gælder

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} + \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n .$$

Bevis

Resultatet følger umiddelbart, da

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(n)}^T & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(n)} \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} + \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n .$$

Resultat 2

$$\left(\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-1} + \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} ,$$

hvor

$$h_{nn} = \mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_n^T$$

er n'te diagonalelement i hatmatricen

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T.$$

Bevis

Multipliseres det postulerede udtryk for

$$(\mathbf{X}_{(n)}^T\mathbf{X}_{(n)})^{-1}$$

fra venstre med

$$\mathbf{X}_{(n)}^T\mathbf{X}_{(n)} = \mathbf{X}^T\mathbf{X} - \mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_n$$

fås

$$\begin{aligned} \mathbf{I} + \frac{1}{1 - h_{nn}}\mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} - \mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \\ - \frac{1}{1 - h_{nn}}\mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_n^T\mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \\ = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Resultat 3

Udelades den n'te observation bliver MK-estimatet

$$\hat{\beta}_{(n)} = \hat{\beta} - \frac{1}{1 - h_{nn}}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_n^T\hat{\mathbf{e}}_n$$

(Dette er (5.1) i bogen for $i = n$. Bemærk at der i bogen mangler en hat over $\mathbf{e}_i$).

Bevis

Af resultat 2 og af

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(n)}^T & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(n)} \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{y}_{(n)} + \mathbf{x}_n^T y_n$$

fås

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)} &= \left(\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} \mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{y}_{(n)} \\ &= \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right] \times [\mathbf{X}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}_n^T y_n] \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T y_n \\ &\quad + \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T y_n . \end{aligned}$$

I dette udtryk er første led $= \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ og i de sidste tre led kan $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T$ sættes uden for parentes til venstre. I næstsidste led står længst til højre $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ og i sidste led $h_{nn} = \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T$, gange y_n . Dermed bliver det samlede udtryk lig med

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \left[y_n - \frac{1}{1 - h_{nn}} \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} y_n \right] .$$

Ved til sidst at benytte

$$1 + \frac{h}{1 - h} = \frac{1}{1 - h} .$$

sammenholdt med definitionen af det n'te residual, $\hat{\mathbf{e}}_n = y_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}$, ses resultatet

$$\hat{\beta}_{(n)} = \hat{\beta} - \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \hat{e}_n .$$

Resultat 4

Om Cook's afstand gælder

$$D_n = \frac{(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(n)})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(n)})}{ps^2} = \frac{r_n^2}{p} \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} ,$$

dvs. at (5.3) og (5.4) er ens.

Bevis

Venstresiden er ifølge (5.1) (resultat 3) lig med

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ps^2(1 - h_{nn})^2} \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \hat{e}_n \right]^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \hat{e}_n \right] \\ &= \frac{h_{nn} \hat{e}_n^2}{ps^2(1 - h_{nn})^2} = \frac{r_n^2}{p} \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} \end{aligned}$$

ifølge definitionen af det standardiserede residual r_n .

Resultat 5

Der gælder

$$(1) \quad \mathbf{x}_n \left(\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} \mathbf{x}_n^T = \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} .$$

Bevis

Ifølge resultat 2 og definitionen af h_{nn} gælder

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_n (\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_n^T \\ &= \mathbf{x}_n \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right] \mathbf{x}_n^T \\ &= h_{nn} + \frac{h_{nn}^2}{1 - h_{nn}} = \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} . \end{aligned}$$

Resultat 6

Der gælder

$$\mathbf{x}_n (\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_n^T = \frac{1}{n-1} + (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}) (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}) ,$$

hvor $\mathbf{x}_{n(1)}$ er værdien af de $p - 1$ forklarende variable i den n 'te observation, hvor $\bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}$ er søjlevekoren bestående af gennemsnittene af de $p - 1$ egentlige forklarende variable beregnet uden anvendelse af den n 'te observation, og hvor $(p - 1) \times (p - 1)$ matricen $(\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1}$ er den inverse af "den empiriske kovariansmatrix" for de egentlige forklarende variable beregnet uden anvendelse af den n 'te observation (pånær en faktor $n - 1$).

Udtrykket (1) i resultat 5 udtrykker dermed afstanden mellem den n 'te observation af de forklarende variable og gennemsnittet af de forklarende variable for de øvrige $n - 1$ observationer. Afstanden måles med den inverse empiriske kovariansmatrix, som i et Wald test - også beregnet uden anvendelse af den n 'te observation. Derfor måler (1) udelukkende, hvor atypisk den n -te observation af de forklarende variable er i forhold til de øvrige $n - 1$ værdier af de forklarende variable.

Bevis

Beviset ligger meget tæt op af beviset i noteform for lærebogens formel (4.9).

Betragt blokinddelingen af $(\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})$

$$\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} = \begin{pmatrix} n-1 & \mathbf{1}^T \mathbf{X}_{(n)(1)} \\ \mathbf{X}_{(n)(1)}^T \mathbf{1} & \mathbf{X}_{(n)(1)}^T \mathbf{X}_{(n)(1)} \end{pmatrix},$$

hvor $\mathbf{X}_{(n)(1)}$ er den $(n-1) \times (p-1)$ dimensionale designmatrix for de $n-1$ første observationer uden den første søjle af et-taller. Denne matrix skal inverteres og den inverse er på blokform

$$\left(\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}.$$

De enkelte blokke i den inverse matrix beregnes ved hjælp af formel (A5.1) side 304, idet der gælder

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}^T$$

og

$$\mathbf{E} = (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1},$$

jf. noten om beviset for lærebogens formel (4.9).

Der gælder

$$\mathbf{G}_{11} = \frac{1}{n-1} + \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)} (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}^T,$$

$$\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{21}^T = - \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)} (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1},$$

og

$$\mathbf{G}_{22} = (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} .$$

I disse formler er $\bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}$ den p - 1 dimensionale søjlevektor, der består af gennemsnittene for de p - 1 egentlige forklarende variable, beregnet uden den n'te observation. Tilsvarende er $\mathbf{x}_n = [1 | \mathbf{x}_{n(1)}]$. Matricen $(\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1}$ er på nær en faktor n eller n - 1 den inverse af den empiriske kovariansmatrix for de p - 1 egentlige forklarende variable, beregnet uden den n'te observation.

Alt i alt er

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_n (\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_n^T \\ &= \mathbf{x}_n \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_n^T \\ &= \frac{1}{n-1} + \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)} (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}^T - \mathbf{x}_{n(1)} (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)}^T - \bar{\mathbf{x}}_{(n)(1)} (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_{n(1)}^T \\ & \quad + \mathbf{x}_{n(1)} (\tilde{\mathbf{X}}_{(n)}^T \tilde{\mathbf{X}}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_{n(1)}^T , \end{aligned}$$

hvilket er lig med højresiden i det postulerede udtryk i resultat 6.

Resultat 7

Der gælder

$$\frac{\hat{e}_n}{s_{(n)} \sqrt{1 - h_{nn}}} = \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}}{s_{(n)} \sqrt{1 + \mathbf{x}_n (\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_n^T}} .$$

Dette viser at (4.11) er lig med (6.1), jf. (6.2).

Bevis

Tælleren på højresiden er ifølge resultat 3

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)} &= y_n - \mathbf{x}_n \left[\hat{\boldsymbol{\beta}} - \frac{1}{1 - h_{nn}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \hat{\mathbf{e}}_n \right] \\
 &= y_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} \hat{\mathbf{e}}_n = \frac{1}{1 - h_{nn}} \hat{\mathbf{e}}_n .
 \end{aligned}$$

Nævneren på højresiden er ifølge resultat 4

$$s_{(n)} \sqrt{1 + \mathbf{x}_n (\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_n^T} = s_{(n)} \sqrt{\frac{1}{1 - h_{nn}}} ,$$

således at højresiden i alt bliver

$$\frac{y_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}}{s_{(n)} \sqrt{1 + \mathbf{x}_n (\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)})^{-1} \mathbf{x}_n^T}} = \frac{\frac{\hat{\mathbf{e}}_n}{1 - h_{nn}}}{s_{(n)} \sqrt{\frac{1}{1 - h_{nn}}}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_n}{s_{(n)} \sqrt{1 - h_{nn}}} .$$

Bemærk at formlen (2) ovenfor viser, at forudsigelsesfejlen når værdien y_n forudsiges ved hjælp af de tilhørende forklarende variable og de parametre $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}$, der estimeres uden afvendelse af den n 'te observation, adskiller sig fra residualen $\hat{\mathbf{e}}_n$ med faktoren $1/(1 - h_{nn})$, der er større end 1 og er meget større end 1, hvis de forklarende variable for den n 'te observation adskiller sig meget fra øvrige.

Resultat 8

$$\text{DFFITS}_n = \frac{\hat{y}_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}}{s_{(n)} \sqrt{h_{nn}}} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_n}{s_{(n)} \sqrt{1 - h_{nn}}} \sqrt{\frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}}} .$$

Altså er (5.5) og (5.6) ens.

Bevis

Der gælder

$$\hat{y}_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)} = y_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)} - (y_n - \hat{y}_n) = \frac{1}{1 - h_{nn}} \hat{e}_n - \hat{e}_n = \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} \hat{e}_n$$

ifølge (2) i beviset for resultat 7. Dermed er

$$\text{DFFITS}_n = \frac{\hat{y}_n - \mathbf{x}_n \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}}{s_{(n)} \sqrt{h_{nn}}} = \frac{h_{nn} \hat{e}_n}{(1 - h_{nn}) s_{(n)} \sqrt{h_{nn}}} = \frac{\hat{e}_n}{s_{(n)} \sqrt{1 - h_{nn}}} \sqrt{\frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}}}.$$

Bemærk at første faktor er det eksternt standardiserede residual

$$t_n = \frac{\hat{e}_n}{s_{(n)} \sqrt{1 - h_{nn}}}.$$

Af resultat 8 og definitionen på Cooks afstand følger umiddelbart

Resultat 9

Der gælder

$$(\text{DFFITS}_n)^2 = t_n^2 \frac{h_{nn}}{1 - h_{nn}} = p \frac{t_n^2}{r_n^2} D_n.$$

DFFITS kvadreret er altså lig med faktoren p gange Cook's afstand, på nær at det internt standardiserede residual r_n i definitionen af Cook's afstand erstattes med det eksternt standardiserede residual t_n i DFFITS_n .

Resultat 10

Der gælder

$$(n - p - 1)s_{(n)}^2 = (n - p)s^2 - \frac{\hat{e}_n^2}{1 - h_{nn}}.$$

Dette er (5.8).

Bevis

Størrelsen

$$(n - p - 1)s_{(n)}^2$$

er residualkvadratsummen beregnet uden anvendelse af n'te sæt. Den kan naturligvis udtrykkes som en kvadratsum af n led minus bidraget fra det n'te led

$$(n - p - 1)s_{(n)}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}) - (y_n - \mathbf{x}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)})^2.$$

Andet led er ifølge (2) i beviset for resultat 7 lig med

$$(y_n - \mathbf{x}_n\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)})^2 = \frac{\hat{e}_n^2}{(1 - h_{nn})^2}.$$

Desuden er ifølge resultat 3

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\hat{e}_n}{1 - h_{nn}}\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_n^T = \hat{\mathbf{e}} + \frac{\hat{e}_n}{1 - h_{nn}}\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_n^T,$$

så

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(n)}) = \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} + \frac{\hat{e}_n^2 h_{nn}}{(1 - h_{nn})^2} ,$$

ifølge definitionen af h_{nn} samt fordi

$$\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} .$$

Alt i alt er

$$(n - p - 1)s_{(n)}^2 = \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} + \frac{\hat{e}_n^2 h_{nn}}{(1 - h_{nn})^2} - \frac{\hat{e}_n^2}{(1 - h_{nn})^2} = (n - p)s^2 - \frac{\hat{e}_n^2}{1 - h_{nn}} .$$

Resultat 10

Der gælder følgende om determinanten af en blokmatrix

$$\begin{vmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_n & 1 \end{vmatrix} = |\mathbf{X}^T \mathbf{X}^T| \left(1 - \mathbf{x}_n (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \right) = |\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T| = |\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)}| .$$

Dvs. at

$$|\mathbf{X}_{(n)} \mathbf{X}_{(n)}| = |\mathbf{X}^T \mathbf{X}| (1 - h_{nn}) ,$$

hvoraf (5.11) følger.

Bevis

Betragt følgende produkt af blokmatricer

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{x}_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ved at tage determinanten på begge sider ses

$$\begin{vmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_n & 1 \end{vmatrix} = |\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n|,$$

som jo ifølge resultat 1 er lig med $|\mathbf{X}_{(n)}^T \mathbf{X}_{(n)}|$.

Tilsvarende gælder

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 - \mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix}$$

og dermed

$$\begin{vmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_n & 1 \end{vmatrix} = |\mathbf{X}^T \mathbf{X}| (1 - \mathbf{x}_n(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n^T).$$