# Økonomisk Kandidateksamen 1998 II.
# Videregående vækstteori.

4 timers prøve uden hjælpemidler. Alle spørgsmål skal besvares.
RETTEVEJLEDNING

**Opgave I** (15 points)

Antag at en regering har mulighed for at udbyde kollektive goder, der fremmer produktiviteten i den private sektor, men kun har mulighed for at finansiere disse goder ved at opkræve forvridende skatter, der hæmmer væksten. Antag ydermere, at skatterne falder på kapitalindkomst. Hvilken sammenhæng kan man forestille sig mellem indkomstfordeling og vækst i en sådan økonomi?

---

**Svar**: Pensum er her Alesina+Rodrik. Ideen er, at der er en vis heterogenitet blandt agenterne hvad angår sammensætningen af deres indkomst. Nogle agenter har en stor andel kapitalindkomst, mens andre har en lille. Antagelsen om, at kun kapitalindkomst beskattes, gør, at forskellige agenter har forskellige præferencer m.h.t. skattesatserne. Alle agenter ønsker en vis skatteopkrævning fordi skatterne finansierer et offentligt gode, der indgår som et essentielt input. Øget indsats af den kollektive produktionsfaktor øger aflønningen af begge faktorer. Heterogeniteten betyder imidlertid, at dem der har relativt stor arbejdsindkomst er mere tilbøjelige til at ønske en høj skat end dem med relativt lav arbejdsindkomst. Dette skyldes, at man får glæde af den øgede produktivitet, men kun i ringe grad er med til at finansiere det kollektive gode.

I samfund med stor ulighed, tolket således at få personer besidder en meget stor del af den samlede kapitalindkomst, tilsiger anvendelsen af et medianvælgerargument, at skatten bliver høj. Dette skyldes, at der er en stor mængde vælgere (et flertal) med relativt lille kapitalindkomst, som kan stemme en høj skat igennem. Eftersom grundmodellen er en endogen vækstmodel, hvor væksten bl.a. bestemmes af udbuddet af det kollektive gode, kan en sådan ulighed medføre lav vækst.

---

**Opgave II** (25 points)

Et lands forbrugere vælger forbrugsforløb $C : [s, \infty] \to \mathbb{R}_+$ der maksimerer

$$U = \int_s^\infty \ln C(t) e^{-\rho(t-s)} dt$$

givet at

$$\int_s^\infty C(t) e^{-r(t-s)} dt \leq W(s)$$

hvor $W(s)$ er formuen til tidspunkt $s$, og $r$ er renten, som er konstant. Der gælder desuden at $\rho > 0$.

**1** Fortolk budgetbetingelsen og find et udtryk for forbrugsniveauet på tidspunkt $s$, f.eks. ved at benytte følgende specialtilfælde af Leibniz-reglen til at finde budgetbetingelsen på den sædvanlige differentiallignings-form:

Når $\int_{a(z)}^\infty f(z,u)du < \infty$ er

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^\infty f(z,u)du = -f(z,a(z)) \frac{\partial a(z)}{\partial z} + \int_{a(z)}^\infty \frac{\partial}{\partial z} f(z,u)du$$

---

**Svar 1** Fortolkning: En stock-budgetbetingelse. Det samlede tilbagediskonterede forbrug må ikke overstige formuen. Det kan evt. bemærkes at W kan gives forskellige tolkninger, f.eks. kan humankapital indfortolkes.

---

**2** Vis at formuen kun er konstant over tid, hvis $r = \rho$.

---

**Svar 2**: I optimum kan budgetbetingelsen s.f.a. af den voksende nyttefkt. uden videre antages at være opfyldt med lighedstegn. Diff. af budgetrestr. giver

$$-C(s) + rW(s) = \dot{W}(s)$$

Brug af Pontrjagins maksimumsprincip giver

$$\dot{C}(s) = (r - \rho) C(s) \Leftrightarrow C(t) = C(s) e^{(r-\rho)(t-s)}$$

Hvis studenten blot postulerer denne regel er det i orden. Dette kan indsættes i budgetrestriktionen

$$\begin{aligned}\int_s^\infty C(t)e^{-r(t-s)}dt &= C(s)\int_s^\infty e^{-\rho(t-s)}dt = W(s) \Leftrightarrow \\ C(s) &= \rho W(s)\end{aligned}$$

Vi har nu

$$W(s)\,(r-\rho) = \dot{W}\,(s)$$

hvoraf resultatet umiddelbart følger.

---

Sammenhængen $r = \rho$ kan under passende forudsætninger vises at gælde for en lukket økonomi. Antag nu, at der sker en liberalisering af de finansielle kapitalbevægelser over landets grænser, således at den indenlandske rente tilpasser sig den internationale rente $r^* < \rho$. Formuen består af indenlandske reale aktiver, $K$ og humankapital $H$ samt nettofordringer på udlandet $F$ (som før liberaliseringen var nul). Vi antager, at kapitalliberaliseringen og den lavere rente øger investeringerne og dermed mængden af indenlandske humane og reale aktiver, således at disse stabiliserer sig omkring niveauet $K^* + H^* > 0$ efter et stykke tid.

**3** Hvordan udvikler økonomiens andre variable sig? Kommentér realismen i denne udvikling?

---

**Svar 3**: Vi har at $W \to 0$ og dermed $F \to -(K^* + H^*)$ således at alle indenlandske aktiver incl. humankapital pantsættes i udlandet. Forbruget går også mod nul. Denne udvikling er natuligvis ikke realistisk. Der er tale om en slags "slaveri" hvor man har solgt sig selv som slave. Situationen opstår fordi modellen er meget simpel.

---

**4** Hvilken antagelse kunne man gøre om vilkårene på det internationale lånemarked, som ville hjælpe på problemet?

Svar 4. For at afhælpe problemet kan man indføre en restriktion på agenternes låntagning, der gør det umuligt at belåne humankapital. Her får $F \to -K$ (udledning kræves ikke) således at der opretholdes et vist forbrug, svarende til afkastet på humankapitalen. Antagelsen må siges at være rimeligt realistisk eftersom det jo notorisk er lettere at låne penge med (tinglyst) sikkerhed i realkapital end uden.

**Opgave III** (60 points)

Betragt en økonomi som, udover forbrugere, er befolket af tre typer agenter: producenter af varer, udlejere af kapitalgoder til vareproducenterne, samt forskervirksomheder, der udvikler nye typer kapitalgoder. Der findes to typer arbejdskraft, nemlig humankapital og almindelig arbejdskraft, hvis samlede udbud er henholdsvis $H$ og $L$, som er konstante.

Den repræsentative vareproducent har følgende produktionsfunktion

$$Y = H_Y^{\alpha} L^{\beta} \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di$$

hvor $0 < \alpha < 1$ , $0 < \beta < 1$ og hvor $x(i)$ er den anvendte mængde af kapitalgode af type $i$ og $L$ og $H_Y$ er input af hhv. arbejdskraft og humankapital. Den enkelte vareproducent, som er pristager, maksimerer sin profit, idet outputvaren er numeraire og således har prisen én.

**1** Kan de forskellige typer kapitalgoder substituere hinanden i produktionen?

**Svar 1** : Ja, reduktion af ét input kan opvejes af øgning af et andet, men ikke i forholdet én til én. Dette skyldes, at der er faldende skalaafkast for det enkelte input

**2** Find et udtryk for virksomhedens efterspørgsel efter kapitalgode $i$, givet at prisen (lejen) er $p(i)$

**Svar 2** Rent formelt er det forholdsvis indviklet at finde optimum (man kan f.eks. bruge Pontrjagins maksimumsprincip.) Det er derfor tilladt, som i artiklen, at sætte "marginalproduktet" af input i lig med prisen på dette input, $p(i)$

$$(1-\alpha-\beta)\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}x(i)^{-(\alpha+\beta)}=p(i)$$

Man kan evt. også isolere $x(i)$

$$x(i)=\left(\frac{(1-\alpha-\beta)\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}}{p(i)}\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}}$$

---

Antag at der for hver type kapitaludstyr kun findes én udlejer, nemlig ejeren af patentet på den pågældende type. En ejer af et patent producerer selv det kapitaludstyr, der lejes ud. Produktionsteknologien er lineær således at den pågældende type kapitalgode og varer kan konverteres i forholdet én til én. Omkostningen ved at udleje $x$ enheder er således alternativomkostningen, $rx$, ved binde kapital i udlejet kapitaludstyr. $r$ er renten, som antages konstant.

**3** Opstil monopolist nr. $i$'s problem og find udtryk for pris og mængde samt den tilhørende monopolprofit.

---

**Svar 3** Monpolisten skal maksimere

$$\pi(i)=p(i)x(i)-rx(i)=(1-\alpha-\beta)\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}x(i)^{1-\alpha-\beta}-rx(i)$$

Dette er en konkav fkt. af x, så maksimum er givet ved

$$(1-\alpha-\beta)^2\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}x(i)^{-\alpha-\beta}=r$$

eller

$$(1-\alpha-\beta)\,p(i)=r$$

hvilket er det samme som

$$p(i)=\frac{r}{(1-\alpha-\beta)}$$

og

$$x(i)=\left(\frac{(1-\alpha-\beta)\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}}{p(i)}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}=\left(\frac{(1-\alpha-\beta)^2\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Profitten bliver

$$\pi(i)=(p(i)-r)\,x(i)=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}rx(i)=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}r\left(\frac{(1-\alpha-\beta)^2\,H_Y^{\alpha}L^{\beta}}{r}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

---

**4** Kommentér udtrykket. Er der nogen forskel på monopolisternes adfærd afhængig af hvilket patent i $[0,A]$, de ejer?

---

**Svar 4** Man ser, at den faldende efterspørgselskurve giver anledning til en mark-up på omkostningerne og at alle patenter er lige meget værd. Patentets adresse i $[0,A]$ har ingen betydning for værdien. Dette understreger, at væksten i denne model ikke fremkommer fordi patenterne bliver bedre, men fordi der kommer flere af dem.

---

**5** Find den pris, $P_A$, som en potentiel ny monopolist netop er villig til at betale for et patent, givet at patentet varer evigt.

---

**Svar 5.** En ny monopolist er villig til at betale netop den tilbagediskonterede værdi af monopolprofitten.

$$P_A=\int_s^{\infty}\pi(i)e^{-r(t-s)}dt=\frac{\pi(i)}{r}=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}x(i)$$

---

Forskervirksomhederne, der maksimerer deres profit, anvender den eksisterende viden $A$ samt humankapital til at frembringe nye typer af kapitalgoder efter differentialligningen

$$\dot{A}=A\delta H_A$$

hvor $H_A=H-H_Y$ er den anvendte humankapital i den repræsentative forskningsvirksomhed

**6** Forklar hvorfor dette i en ligevægt med $H_A > 0$ indebærer følgende sammenhæng mellem prisen på humankapital, $w_H$ og $P_A$ :

$$P_A \delta A = w_H$$

---

**Svar 6** Forklaringen kan gives på flere måder. Følgende er en slags skabelon. Strømmen af indtægter ved at opdage nye patenter er $\dot{A}\ P_A$. Strømmen af udgifter til dette formål er $H_A w_H$. Disse størrelser skal være ens, idet forskersektoren ellers enten ville være urentabel eller give overnormal profit. Begge dele ville føre til en justering af $w_H$. Vi har

$$\begin{aligned} P_A \dot{A} &= H_A w_H \Leftrightarrow \\ H_A w_H &= P_A \delta H_A A \end{aligned}$$

Dette giver at $H_A = 0$ eller

$$w_H = P_A \delta A$$

som skulle forklares.

---

**7** Hvordan bliver fordelingen af humankapital på de to anvendelser i en ligevægt med $H_A > 0$?

---

**Svar 7** Her benyttes, at marginalproduktet for humankapital i færdigvaresektoren er lig med lønnen $w_H$ :

$$w_H = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta A x^{1-\alpha-\beta}$$

hvor x er den fælles værdi for $x(i)$'erne. Brug nu $w_H = P_A \delta A$ :

$$P_A \delta = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta x^{1-\alpha-\beta}$$

og $P_A = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} x$

$$\delta \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta x^{-\alpha-\beta}$$

Endelig anvendes $(1-\alpha-\beta)^2 H_Y^{\alpha} L^{\beta} x^{-\alpha-\beta} = r$ :

$$H_Y = \frac{\alpha r}{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}$$

$H_A$ bliver så naturligvis

$$H_A = H - \frac{\alpha r}{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}$$

---

**8** Find et udtryk for vækstraten i $A$ og $Y$ i en sådan ligevægt, udtrykt ved renten og beholdningen af humankapital (samt parametre). Hvorfor giver en højere rente lavere vækstrate?

---

**Svar 8** Vækstraten i A er naturligvis

$$g = \delta H_A = \delta H - \frac{\alpha r}{(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)} \equiv \delta H - \Lambda r$$

hvor den sidste omskrivning er foretaget for at give et mere bekvemt udtryk. $\Lambda$ er alene fkt. af $\alpha$ og $\beta$.

At vækstraten i Y også bliver $g$ ses ved at betragte et udtryk for Y:

$$Y = H_Y^{\alpha} L^{\beta} A x^{1-\alpha-\beta}$$

Både L, $H_Y$ og $x$ er konstante over tid, så vækstraten i Y må være lige med vækstraten i A.

Forklaringen på, at en højere rente mindsker vækstraten er, at den tilbagediskonterede værdi af et patent reduceres:

$$P_A = \frac{\alpha+\beta}{r} x(i) p(i)$$

Dermed bliver den pris, forskervirksomhederne kan tage ($P_A$), mindre. Dermed reduceres forskningsindsatsen. (Mere humankapital kanaliseres over i færdigvaresektoren, hvor marginalproduktet falder tilsvarende). Det er tilstrækkeligt at omtale den tidsmæssige effekt (mere diskontering), men ekstra fint hvis følgende herudover bemærkes:

- Renten er monopolistens løbende omkostning. En stigning vil således også reducere den løbende profit, udtrykt ved et fald i $x(i)p(i)$.
- Effekten dæmpes ved at mere humankapital kanaliseres over i færdigvaresektoren. Dette øger den fysiske kapitals marginalprodukt og dermed monopolprofitten.

---

Antag, at økonomien befinder sig i steady state, således at renten er konstant, og ovenstående resultater gælder i den pågældende ligevægt. Forbrugerne antages at maksimere

$$\int_s^\infty \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho(t-s)} dt.$$

under passende bibetingelser således at forbruget vokser med raten $\gamma_C = \frac{r-\rho}{\theta}$.

**9** Begrund hvorfor vækstraterne i $Y$ og $C$ skal være ens og find et udtryk for den fælles vækstrate, som kun indeholder parametre og evt. eksogene variable.

---

**Svar 9** Med konstant vækstrate i C og Y kan førstnævnte åbenlyst ikke overstige sidstnævnte. Det omvendte forholde ville føre til at forbruget som andel af indkomsten går mod nul, hvilket ikke kan være optimalt. Teknisk set ville det føre til, at en transversalitetsbetingelsen ville blive brudt. Derfor må Y og C vokse med samme rate g, og vi har

$$g = \frac{r-\rho}{\theta} \Leftrightarrow r = g\theta + \rho$$

Kombineres dette med $g = \delta H - \Lambda r$ fås

$$\begin{aligned} g &= \delta H - \Lambda(g\theta + \rho) \Leftrightarrow \\ g &= \frac{\delta H - \Lambda\rho}{1 + \Lambda\theta} \end{aligned}$$

---

**10** Vis at humankapitalen skal have en vis størrelse for at der overhovedet kommer positiv vækst i økonomien. Hvorledes skal analysen i spm. 6-8 ændres, hvis humankapitalen er mindre end dette niveau?

---

**Svar 10.** Det forudsattes, at vi befandt os i en ligevægt med $H_A > 0$. Dvs. $g > 0$ og dermed

$$H > \frac{\Lambda\rho}{\delta}$$

Hvis dette ikke er opfyldt, er analysen ikke gyldig, og vi har i stedet en modstrid i analysen, som stammer fra at vi forudsatte $H_A > 0$. Vi kan så konkludere, at $H_A = 0$ og at økonomien ikke vokser, fordi der kun er humankapital nok til at forsyne færdivaresektoren. Her er der faldende marginalprodukt af $H_Y$, så i tilfælde af stor knaphed på humankapital bliver marginalproduktet her meget stort mens det i forskningssektoren er konstant.

---

**11** Skitsér hvorledes man kunne efterprøve om vækstraten i økonomien er optimal. Hvilke kilder til inoptimalitet i markedsløsningen kunne der være?

---

**Svar 11** Dette gøres naturligvis ved at opstille samfundsplanlæggerens problem som består i at maksimere

$$\int_s^\infty \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho(t-s)} dt.$$

under betingelserne

$$\dot{A} = A\delta H_A$$

og

$$\dot{K} = Y - C$$

hvor $K = \int_0^A x(i)di$. Det er ikke noget krav at dette problem opstilles eksplicit, endsige løses, men ideen om samfundsplanlæggeren skal være beskrevet verbalt. Der kan identificeres to kilder til inoptimalitet:

- For det første tager forskervirksomhederne ikke hensyn til, at frembringelsen af et patent gør det nemmere at frembringe det næste: forskning bygger på eksisterende viden. Denne positive eksternalitet gør, at der i markedsløsningen bruges for lidt ressorcer på forskning.

- Monopoliseret input-marked. Romer siger, at forvridningen skyldes, at monopol-mark-up'en er en kile, der drives ind mellem samfundsmæssig og privat aflønning. Forklaringen forkommer ikke helt overbevisende. Man bør sondre mellem bestemmelsen af mængden af det enkelte input x og antallet af patenter der tages pr. tidsenhed. Førstnævnte bestemmes af monopolisten, mens sidstnævnte bestemmes af forskervirksomheden. Monopolet giver overnormal profit (med free entry skulle udgangspunktet være aflønning efter omkostninger), som kanaliseres videre til forskerne, og man kunne således argumentere for, at dette ville give anledning til for *meget* forskning.

At dette ikke bliver tilfældet skyldes, at aflønning efter marginalprodukt ikke er et relevant udgangspunkt ved diskussion af optimalitet i denne sammenhæng. Som Romer selv i indledningen gør opmærksom på, umuliggør produktionsfunktionen nemlig, at alle faktorer aflønnes i overensstemmelse med deres marginalprodukt. Hvis input udbyder og forskningsvirksomheder samlet set skulle aflønnes efter marginalprodukt ville denne udgøre hele produktionen, efterladende nul til de øvrige faktorer. Selve det, at en bestemt faktor aflønnes med mindre end det samfundsmæssige marginalprodukt er altså ikke nok til, at man kan hævde, at der opstår en inoptimalitet.

Det, man må nøjes med at sige, er, at aflønningen af forskningen og dermed dens omfang er helt løsrevet fra overvejelser om marginalprodukter og optimalitet og at monopolerne på inputmarkederne her spiller en vigtig rolle. Den monopolprofit, der opstår giver anledning til en forskningsindsats, der er inoptimalt lille.

Der må på dette punkt udvises stor largesse m.h.t. forklaringerne. Eneste krav bør være en nogenlunde sammenhængende forklaring der, identificerer monopolet eller den manglende mulighed for marginalproduktaflønning som årsag. Alt hvad der ligger ud over pensum (Romer) er at betragte som et ekstra plus.

**12** Diskutér modellen og sammenlign eventuelt med andre modeller.

---

**Svar 12.** Her bør eksaminanden have forholdsvis frie hænder. Enhver fornuftig kommentar, der med nogen ret kan siges at relatere sig til modellen bør indvirke positivt på bedømmelsen, dog med faldende "marginalprodukt". Følgende aspekter kan det dog være særlig relevant at kommentere:

1. Skalaeffekterne

- For lille H giver nul forskning og større H giver større vækst. Nulvæksttilfældet svarer til et forhistorisk, eller måske førindustrielt samfund. Se Romer herom.

- Skalaeffekternes betydning for frihandel. Den største frihandelsgevinst opstår, når lande/regioner med stor *humankapital* indfører frihandel.

- Skalaeffekternes mangel på empirisk relevans. På trods af, at mange flere ressourcer på verdensplan anvendes på forskning er vækstraterne ikke steget. (Se Jones herom)

2. Monopoler er ikke altid uønskværdige. Denne lektie er selvfølgelig ikke ny, idet selv ideen med patenter kan siges at være en belønning af opfinderen i form af en monopolprofit. Det interessante er at se dette inkorporeret i en model, hvor det har en stærk makroøkonomisk betydning.

Andre modeller, der kan sammenlignes med:

Modellen har mange fællestræk med Aghion+Howitt.

Der kan desuden sammenlignes med Romers egen learning by doing model og Barro's model med offentlige goder (Barro+Sala-i-Martin, 4.4) . Her er forskellene markante, idet den endogene vækst ikke fremkommer ved F&U, men ved hhv. investeringseksternaliteter og kollektive goder. I disse modeller sker aflønningen som i den traditionelle vækstteori efter marginalprodukt og uden brug af monopoler. En vigtig pointe hos Romer er, at det ikke er muligt både at have marginalproduktaflønning, endogen vækst og F&U foretaget af en profitmotiveret, resursekrævende forskningssektor.

Der kan ligeledes sammenlignes med Jones, som har en model, der er som Romers, men hvor $A$ er erstattet af $A^{\phi}$ med $\phi < 1$ i akkumulationsligningen for antal patenter. Dvs. eksternaliteten reduceres og den endogene vækst forsvinder. Som i de traditionelle vækst-modeller beror væksten nu på eksogene forhold. Jones artikel viser, at endogen vækst let kan forsvinde ved tilsyneladende små ændring. Om dette er alvorligt beror på, om man mener, den foretagne ændring er stor. Det må nok vurderes som mere alvorligt, når det påpeges, at empirien meget kraftigt afviser skalaeffekterne, jvf. ovenfor.