Økonomisk kandidateksamen 1997 II: Videregående vækstteori

4 timers prøve uden hjælpemidler. Alle fire opgaver skal besvares.

Opg. 1 vægtes 10 %, opg. 2 vægtes 30 %, opg. 3 vægtes 50 %, mens opg. 4 vægtes 10 %.

1 Opg. 1.

Giv en kort begrundet vurdering af følgende udsagn: "De traditionelle neoklassiske vækstmodeller (fx Solow-Swan modellen) med eksogene tekniske fremskridt forudsiger, at tilbagestående lande har større vækst i output pr. capita end højtudviklede lande. Da dette strider mod, hvad data siger, må disse modeller forkastes."

2 Opg. 2.

Betragt en lukket markedsøkonomi med L nyttemaksimerende husholdninger og M profitmaksimerende virksomheder, der opererer på fuldkommen konkurrence markeder (L og M er konstante, M er "stor"). Hver husholdning udbyder uelastisk 1 enhed arbejde pr. tidsenhed. Tilsammen producerer virksomhederne en homogen outputmængde påY pr. tidsenhed, og denne anvendes til husholdningernes forbrug $C \equiv cL$ og til investering i realkapital K, dvs. $Y = C + \dot{K} + \delta K$, hvor $\delta \geq 0$ er kapitalnedslidningsraten. Variablene er implicit daterede, og $\dot{K}$ er differentialkvotienten af K mht. tiden t. Initialværdien $K_0 > 0$ er given. Husholdningerne ejer realkapitalen og lejer denne ud til virksomhederne. Husholdningerne kan låne eller låne ud til den gældende reale markedsrente r. Der er perfekt forudseenhed.

Idet dateringen af variablene stadig er underforstået, hvor den ikke er eksplicit, er produktionsfunktionen for virksomhed nr. i ($i = 1, 2, ..., M$) givet ved

$$Y_i = F(K_i, AL_i), \tag{2.1}$$

hvor F er en neoklassisk produktionsfunktion med konstant skalaafkast, mens Y_i, K_i og L_i er hhv. virksomhedens output, kapitalinput og arbejdsinput. Om variablen A antages

$$A = A(t) = K(t)^{\mu}, \quad 0 < \mu \leq 1. \tag{2.2}$$

a) Kommenter (2.1) og (2.2).

b) Bestem i den generelle ligevægt r på et givet tidspunkt t.

c) Antag $\mu < 1$ og bestem vækstraten i hhv. Y og $y \equiv Y/L$ under balanceret vækst (dvs. i et forløb hvor Y, K og C vokser med samme rate, evt. raten 0).

d) Kunne man med bibeholdelse af $\mu < 1$ ved en simpel ændring i modellen få den til at muliggøre positiv vækst i y under balanceret vækst? Kommenter.

e) Antag, at alle husholdningerne har samme elementarnyttefunktion med konstant grænsenytteelasticitet $\theta > 1$, og at de har uendelig tidshorisont og en konstant tidspræferencerate (mht. nytte) $\rho > 0$. Lad $\mu = 1$, og $F_1(1, L) > \delta + \rho$, hvor F_1 betyder den partielle afledede af F mht. 1. argument. Bestem i den generelle ligevægt, hvad vækstraten i hhv. c, k ($\equiv K/L$) og y må være under balanceret vækst. Kommenter.

f) Nævn nogle økonomisk-politiske overvejelser, som modellen kunne give anledning til?

3 Opg. 3.

Modellen fra opg. 2 ændres nu ved at tilføje en "iværksætter-sektor", ved at se bort fra realkapital og ved at erstatte (2.1) og (2.2) med:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}(x_{ij})^{\alpha}, \quad A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ A \text{ og } \alpha \text{ konstante,} \tag{3.1}$$

$$\dot{N} = Y_R/\eta, \quad \eta > 0,\ \eta \text{ konstant.} \tag{3.2}$$

Her er Y_R den mængde af samlet output Y, som opfinderaktiviteten (som der er fri adgang til) i samfundet lægger beslag på; Y kan nu passende kaldes basisvareproduktionen. Desuden anvendes en del af basisvareproduktionen, nemlig $Y_X = Y - C - Y_R$, til fremstilling af specialiserede inputvarer, som der på tidspunkt t er N forskellige typer af, $j = 1, 2, ..., N$. I (3.2) er N at opfatte som en tilnærmelsesvis kontinuert og differentiabel funktion af tiden t (der ses altså bort fra delelighedsproblemer). Når først inputvare j er opfundet, kræves der til at fremstille én enhed af den én basisvare og ikke andet; dette gælder for alle $j = 1, 2, ..., N$. Husholdningerne i økonomien er beskrevet på samme måde som i opg. 2 bortset fra, at husholdningssektorens formue nu er placeret i iværksættervirksomheder frem for realkapital.

a) Kommenter (3.1) og (3.2).

b) Antag at man (gratis) kan tage evigtvarende patent på den kommercielle anvendelse af sin opfindelse. Bestem den for opfinderen af inputvare j mest fordelagtige salgspris $p_j(\tau)$ for alle $\tau \geq t$, hvor t er det aktuelle tidspunkt.

c) Antag, at mulighederne for opfindelser er så mangfoldige, at flere forskellige opfindere aldrig jagter den samme opfindelse. Antag videre, at økonomien er i generel ligevægt med positiv vækst. Bestem vækstraten i c og angiv de relevante parameterrestriktioner.

d) Bestem vækstraten i hhv. N og y (en komplet matematisk udledning kan erstattes med en verbal begrundelse for konklusionen).

e) Hvorledes afhænger vækstraten i y af parametrene? Kommenter. Hvad siger modellen om væksten i to forskellige (isolerede) lande, der er ens mht. alle parametre bortset fra L?

f) Hvad kunne en regering gøre for at sikre en Pareto-optimal ressourceallokering i den decentraliserede økonomi? (En rent verbal redegørelse kan accepteres, men jo mere eksakt spørgsmålet besvares, jo bedre.)

g) Giv en vurdering af modellen i relation til begrebet "betinget konvergens" fra den empiriske vækstforskning.

h) Nævn nogle mulige udvidelser af modellen, og hvilke implikationer de har, fx i relation til pkt. g) ovenfor.

4 Opg. 4.

Formuler og kommenter forskellige mulige specifikationer af opfindelsesproduktionsfunktionen.

5 Løsning

5.1 Opg. 1.

Kilde: B&S, kap. 1.

Udsagnet er teoretisk forkert og empirisk upræcist. Ud fra fx Solow-Swanmodellen kan man kun forvente, at et tilbagestående land har større vækstrate i output pr. capita end et højtudviklet land, hvis landene er nogenlunde ens mht. aggregeret produktionsfunktion og de for steady state relevante parametre (s, n, δ, x). Modellen implicerer ikke *absolut konvergens*, men kun *betinget konvergens*. Den empirisk orienterede vækstforskning baseret på tværsnitsundersøgelser af vækstdata afviser *absolut konvergens*, men ikke betinget konvergens. Man taler om absolut konvergens (eller mere præcist absolut β-konvergens), hvis der for en stor gruppe forskelligartede lande observeres en klar negativ sammenhæng mellem landenes initialniveau for y (indkomst pr. indbygger eller pr. arbejdstime) og y's efterfølgende gennemsnitlige vækstrate g (beregnet over en længere årrække). I den enkleste udgave er regressionsligningen

$$g = \alpha - \beta ln y_0 + u \quad (u \text{ hvid støj}). \tag{*}$$

Absolut konvergens indebærer, at estimatet $\hat{\beta} > 0$ (signifikant). Men empirisk holder dette ikke, når man ser på verdens lande under ét.

Solow-Swanmodellen implicerer kun, at et land tenderer til at vokse relativt hurtigt, hvis det befinder sig langt under sin steady state position, dvs. hvis dets output pr. enhed *effektiv* arbejdskraft er langt under sin egen steady state værdi. Dette svarer til *betinget konvergens*. Man siger, at der foreligger *betinget konvergens* (eller mere præcist betinget β-konvergens), hvis der, når de for steady state relevante parametre (incl. teknologi) er holdt konstant, er en klar negativ sammenhæng mellem initialværdi af y og gennemsnitlig vækstrate i y (over en længere efterfølgende årrække). Denne hypotese bekræftes af empirien. B&S viser fx bl.a., at når man ser på OECD-landene for sig (lande der kan formodes at være nogenlunde ens mht. parametre), bliver $\hat{\beta}$ i (*) signifikant positiv.

At empirien for verdens lande ikke tyder på absolut konvergens er altså fuldt foreneligt med Solow-Swanmodellen, da forklaringen kan være, at landene har vidt forskellig steady state position. En kritik af Solow-Swanmodellen må snarere dreje sig sig om den teoretiske mangel, at modellen lader hastigheden, hvormed arbejdseffektiviteten vokser, være eksogen. Denne hastighed er formentlig afhængig af økonomiske forhold.

5.2 Opg. 2.

Kilde: Primært B&S, kap. 4.3; derudover Jones (1995) og Groth (1992).

a) Det interessante ved (2.1) og (2.2) er, at de udtrykker en antagelse om, at arbejdseffektiviteten i virksomhederne er en voksende funktion af det *aggregerede* kapitalapparat i samfundet. Der er altså tale om en variant af Arrows hypotese om Learning-by-doing (Arrow 1962), undertiden kaldt Arrows Learning-by-investing hypotese, ifølge hvilken det først og fremmest er gennem investeringer, at der læres. Både når nye maskiner fremstilles, og når de bringes i anvendelse, ændres omgivelserne, hvori produktion finder sted, og dette stimulerer indlæring af dels bedre måder at indrette maskinerne på, dels bedre måder at anvende dem på. Arrow antog, at disse effektivitetsfremmende erfaringer ikke kunne privatiseres, men meget hurtigt spredtes til alle. Derfor er effektivitetsindekset A ikke virksomhedsspecifikt. Som (2.2) er formuleret, må det være de forudgående akkumulerede aggregerede *netto*investeringer, der betragtes som afgørende for den aktuelle arbejdseffektivitet (snarere end de akkumulerede bruttoinvesteringer).

b) Betragt først virksomhed nr. i. Den løser profitmaksimeringsproblemet

$$\max_{K_i, L_i} \Pi_i = F(K_i, AL_i) - RK_i - wL_i,$$

hvor R er den reale lejesats for kapital, og w er reallønnen. Den ene FOC bliver:

$$\begin{aligned} \partial \Pi_i / \partial K_i &= F_1(K_i, AL_i) - R = 0, \text{ dvs.} \\ F_1(k_i, A) &= R, \text{ hvor } k_i \equiv K_i/L_i, \qquad (5.1) \end{aligned}$$

idet F_1 er homogen af 0. grad som følge af, at F er homogen af 1. grad. Da F er neoklassisk, er $F_{11} < 0$, og vi kan forestille os ligningen (5.1) "løst" for k_i, dvs.

$$k_i = k(R, A), \qquad (5.2)$$

hvilket gælder for $i = 1, 2, ..., M$.

I generel ligevægt er der clearing på faktormarkederne, dvs.

$$\begin{aligned} \sum_i K_i &= K, \text{ og} \qquad (5.3) \\ \sum_i L_i &= L. \qquad (5.4) \end{aligned}$$

Af (5.2) ses, at alle virksomheder vælger samme kapitalintensitet k_i, og i generel ligevægt må denne være lig K/L, der er prædetermineret. (Mere formelt: indsætning af $K_i \equiv k_i L_i = k(R, A) L_i$ i (5.3) giver $k(R, A) = K/L$ fra (5.4).) Indsætning i (5.1) giver nu $R = F_1(K/L, A)$, og når heri indsættes (2.2), fås

$$R = F_1(K/L, K^{\mu}).$$

I generel ligevægt med perfekt forudseenhed må afkastraten ved alternative formueplaceringer være ens. Afkastraten ved at besidde realkapital er $(RK-\delta K)/K = R-\delta$. Afkastraten ved at låne ud er realrenten r. I ligevægt må altså $R = r+\delta$, hvorefter vi får

$$r = F_1(K/L, K^\mu) - \delta, \tag{5.5}$$

hvorved r er bestemt for givet t (og dermed givet K). Vi ser, at hvis og kun hvis $\mu = 1$, er realrenten r uafhængig af K (der jo generelt vil afhænge af t). Dette får betydning ved pkt. e) nedenfor.

c) Vi har $Y = \sum_i Y_i = \sum_i y_i L_i = \sum_i F(k_i, K^\mu) L_i = \sum_i F(K/L, K^\mu) L_i = F(K/L, K^\mu)L$, dvs.

$$Y = F(K, N), \text{ hvor } N \equiv K^\mu L, \tag{5.6}$$

dvs. N er aggregeret arbejdsindsats målt i effektivitetsenheder. Under balanceret vækst vokser Y og K med samme rate (evt. raten nul). Pga. F's homogenitet af 1. grad må også N vokse med denne rate under balanceret vækst (thi af $Y/K = F(1, N/K)$ følger, at Y/K konstant medfører N/K konstant). Dvs.

$$\dot{Y}/Y = \dot{K}/K = \dot{N}/N = \mu\dot{K}/K + \dot{L}/L = \mu\dot{K}/K + n,$$

idet vi lader $\dot{L}/L = n$, en konstant. Idet $\mu < 1$, giver dette

$$\dot{Y}/Y = n/(1-\mu). \tag{5.7}$$

Da L i nærværende model er forudsat konstant, må $n = 0$, og dermed $\dot{Y}/Y = \dot{y}/y = 0$.

d) Lad $n > 0$. Da fås $\dot{Y}/Y = n/(1-\mu) > 0$ og

$$\dot{y}/y = \dot{Y}/Y - n = n\mu/(1-\mu) > 0. \tag{5.8}$$

Kommentar: Vi ser, at steady state-vækstraten i y nu er positiv, uden at nogen eksogen teknologifaktor vokser (til forskel fra fx Solow-Swanmodellen eller Ramsey-modellen med eksogene tekniske fremskridt). På den anden side kan steady state vækstraten i y i nærværende model kun være positiv, hvis der er vækst i en eksogen faktor, her befolkningen (arbejdsstyrken). Derfor er der "kun" tale om semiendogen vækst, ikke fuldt endogen vækst. Forklaringen er, at $0 < \mu < 1$ indebærer, at Y

ikke "i det lange løb" kan "følge med" væksten i K med mindre L vokser og dermed understøtter væksten i det effektive arbejdsinput N.

e) Med de angivne oplysninger om nyttefunktion m.v. har den repræsentative husholdning, set fra tidspunkt 0, beslutningsproblemet

$$\begin{aligned}
\max_{(c_t)} U_0 &= \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \text{ ub.} && (5.9)\\
c_t &\geq 0, \\
\dot{a}_t &= w_t + r_t a_t - c_t, \ a_0 \text{ given,} && (5.10)\\
\lim_{t\to\infty} a_t e^{-\int_0^t r_s ds} &\geq 0, && \text{(NPG)}
\end{aligned}$$

hvor a_t er husholdningens reale finansielle formue på tidspunkt t.

Løbende værdi-Hamiltonfunktionen bliver

$$H = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda(w + ra - c),$$

hvor hjælpevariablen λ kan fortolkes som skyggeprisen på formue (langs den optimale bane). Første ordens betingelserne er

$$\begin{aligned}
\partial H/\partial c &= c^{-\theta} - \lambda = 0, \quad \text{dvs. } c^{-\theta} = \lambda, \\
\partial H/\partial a &= \lambda r = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, \quad \text{dvs. } -\dot{\lambda}/\lambda = r - \rho,
\end{aligned}$$

og den nødvendige transversalitetsbetingelse er

$$\lim_{t\to\infty} a_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0. \qquad \text{(TVC)}$$

Logaritmisk differentiation mht. t i den første betingelse og indsætning af den anden giver den sædvanlige Keynes-Ramsey-regel

$$\dot{c}_t/c_t = (1/\theta)(r_t - \rho). \qquad (5.11)$$

Da F_1 er homogen af 0. grad, giver (5.5), med $\mu = 1$,

$$r_t = F_1(K_t/L, K_t) - \delta = F_1(1, L) - \delta \equiv \bar{r}. \qquad (5.12)$$

(5.12) viser, at realrenten er *uafhængig* af K og dermed af t. Indsætning i (5.11) giver den konstante vækstrate

$$\dot{c}/c = (1/\theta)(F_1(1, L) - \delta - \rho) \equiv \gamma. \qquad (5.13)$$

Ifølge oplysningen om, at $F_1(1, L) > \delta + \rho$, er $\gamma > 0$. (Da $\theta > 1$, er $(1-\theta)\gamma < 0 < \rho$, og nytteintegralet (5.9) er dermed veldefineret.)

For at finde vækstraten i $k \equiv K/L$ betragtes anvendelsesidentiteten $\dot{K} = Y - cL - \delta K$, der giver

$$\dot{k} = y - c - \delta k. \tag{5.14}$$

Fra (5.6) med $\mu = 1$ har vi $y \equiv Y/L = F(1, L)k$, da F er homogen af 1. grad. Dette indsættes i (5.14), der herefter kan skrives på standardformen for en 1. ordens lineær differentialligning

$$\dot{k}_t - [F(1, L) - \delta]\, k_t = -c_0 e^{\gamma t}, \tag{5.15}$$

hvor vi har benyttet (5.13). I generel ligevægt er $a_t = k_t$ for alle t.

Essensen i ovenstående er, at med $\mu = 1$ er teknologi og virksomhedsadfærd sådan, at realrenten og det aggregerede y/k-forhold bliver konstante - dvs. der bliver tale om en "AK-lignende model". Forbrugsniveauet c_0 er endogent, men fra vort almindelige kendskab til AK-lignende modeller ved vi, at den eneste løsning af (5.15), der er forenelig med, at husholdningerne overholder både (NPG) og (TVC), er den, hvor

$$\dot{k}/k = \gamma \text{ for alle } t, \tag{5.16}$$

og dermed $c_t/k_t = F(1, L) - \delta - \gamma$ for alle t.

Da

$$y = F(1, L)k, \tag{5.17}$$

fås nu $\dot{y}/y = \gamma$ for alle t.

Kommentar: Modellen med $\mu = 1$ svarer til Romers 1986-model. Den frembringer endogen vækst i snæver forstand. Da der er tale om en AK-lignende model, er økonomien i steady state fra starten ("no transitional dynamics"). Af (5.13) ses, at $\partial\gamma/\partial L = (1/\theta)F_{12}(1, L) > 0$.

Der foreligger altså en *skalaeffekt* på vækstraten: større arbejdsstyrke medfører (alt andet lige) større vækstrate. Afgørende for dette resultat er, at det tekniske vidensniveau, repræsenteret ved effektivitetsindekset A, er ikke-rivaliserende. Dette medfører, at når arbejdsstyrken er større, kan A omkostningsfrit udnyttes af flere (sagt på en anden måde: pr. capita-omkostningen ved at "levere" et givet A til hver person bliver mindre). Herved frembringes for det første en *niveau*effekt på output pr. hoved, hvilket ses af (5.17) (for given k_0 er y_0 des større, jo større L er). For det andet frembringes i en endogen vækstmodel en varig *vækst*effekt, idet steady state realrenten bliver større, som det ses af (5.12).

f) Investeringer har ifølge modellen en positiv ekstern effekt. Det gælder, hvad enten $0 < \mu < 1$, eller $\mu = 1$. Vi nøjes nu med at se på tilfældet $\mu = 1$. Det "private" grænseprodukt af kapital er $F_1(1, L)$, jf. (5.12). Men det "samfundsmæssige" grænseprodukt af kapital er $F(1, L)$, jf. (5.17). Da iflg. Eulers sætning om homogene funktioner $F(1, L) = F_1(1, L) + F_2(1, L)L > F_1(1, L)$, når $L > 0$, er det "samfundsmæssige" grænseprodukt af kapital større end det "private". Dette giver anledning til at overveje internaliserering af den eksterne effekt, fx. ved et tilskud til virksomheder, der benytter kapital, lad os sige et tilskud med satsen s. Herved ændres profitmaksimeringsbetingelsen (5.1) til

$$F_1(k_i, A) = (1 - s)R = (1 - s)(r + \delta), \tag{5.18}$$

hvorved (5.5), med $\mu = 1$, bliver

$$(1 - s)(r + \delta) = F_1(1, L). \tag{5.19}$$

Regeringen bør nu fastsætte s sådan, at realrenten r bliver lig det *samfundsmæssige* netto-grænseprodukt af kapital, dvs. så

$$r = F(1, L) - \delta. \tag{5.20}$$

Af (5.19) og (5.20) finder vi

$$s = 1 - \frac{F_1(1, L)}{F(1, L)} \tag{5.21}$$

Det samlede tilskud, $S = s(r + \delta)K$, kunne finansieres med en ikke-forvridende skat:

a) en lump-sum skat T pr. husholdning, opfyldende $LT = S$; eller

b) en proportional lønindkomstskat med satsen τ opfyldende $\tau wL = S$, hvor $w = \partial Y/\partial L = F_2(K, KL)K$ fra (5.6) med $\mu = 1$; eller

c) en proportional forbrugsskat σ opfyldende $\sigma cL = S$.

b) og c) er i denne model ikke-forvridende, da fritid ikke indgår i nyttefunktionen.

Besvarelsen af spm. f) er mere præcis end strengt nødvendigt, spørgsmålets formulering taget i betragtning.

5.3 Opg. 3.

Kilde: Primært B&S, kap. 6.1. Derudover Romer (1990), Jones (1995), Groth (1992).

a) (3.1) og (3.2) giver en formalisering af den hypotese, at opfindelser af stadig nye typer inputvarer og den deraf følgende arbejdsdeling og specialisering øger det økonomiske systems effektivitet (der er effektivitetsmæssige fordele ved "omvejsproduktion", et bredt netværk af specialiserede produktionsgrene understøtter produktiviteten i basisvareproduktionen). På et givet tidspunkt t er N (antallet af forskellige typer af inputvarer) givet. I basisvaresektoren er teknologien af Cobb-Douglas-CES form, idet vi kan skrive

$$Y_i = A{L_i}^{1-\alpha}(CES)^{\alpha}, \text{ hvor } CES \equiv \left[\sum_{j=1}^{N}(x_{ij})^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

For enkeltheds skyld abstraheres i (3.1) fra varige inputvarer (realkapital).

(3.2) er en formalisering af det faktum, at opfinderaktivitet er ressourcekrævende. I denne model er dette repræsenteret ved, at der til at lave én opfindelse (opfinde én ny type inputvare) medgår η enheder af basisvaren. Dette kan ses som en forenklet formulering af en antagelse om, at teknologien i opfinderaktivitet er essentielt den samme som i basisvareproduktion (bortset fra omregningsforholdet η). Antagelsen om, at fremstilling af én enhed af inputvare j kræver én enhed af basisvaren og ikke andet, kan fortolkes på tilsvarende måde. Udover at N_t repræsenterer det antal forskellige typer af inputvarer, der findes påtidspunkt t, kan N_t fortolkes som udtryk for "specialiseringsgraden" af sættet af inputvarer, hvilket lægger nærmere op til opfattelsen af N som en tilnærmelsesvis kontinuert og differentiabel funktion af tiden.

Modellen er nu et eksempel på den variant af innovationsbaseret endogen vækst, hvor væksten fremkommer gennem øget produktspecialisering (snarere end øget produktkvalitet). Alt i alt svarer modellen til Romers 1987-model.

b) Den mest fordelagtige salgspris på inputvare j fra tidspunkt t og fremefter er den pris-tidsprofil, der giver størst mulig nutidsværdi $V_j(t)$ af hele den fremtidige indtjeningstrøm

$$V_j(t) = \int_t^{\infty} \pi_j(\tau)e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds}d\tau, \text{ hvor } \pi_j(\tau) \equiv (p_j(\tau)-1)X_j(\tau), \tag{5.22}$$

hvor $X_j(\tau)$ er den solgte mængde på tidspunkt τ. Da der ikke er afhængighed mellem de forskellige tidspunkter, kan problemet reduceres til at finde den statiske monopolpris på hvert tidspunkt. Denne afhænger af efterspørgslen efter inputvare j, en efterspørgsel der kommer fra basisvaresektoren, som vi derfor nu vil se på. Idet vi bruger basisvarer som regneenhed, og w er lønnen, løser virksomhed nr. i i basisvaresektoren under fuldkommen konkurrence profitmaksimeringsproblemet

$$\begin{aligned}\max_{L_i,(x_{ij})_{j=1}^N} \Pi_i &= Y_i - wL_i - \sum_{j=1}^N p_j x_{ij} \text{ ub.} \\ Y_i &= A{L_i}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^N (x_{ij})^\alpha.\end{aligned}$$

FOC bliver:

$$\partial\Pi_i/\partial L_i = \partial Y_i/\partial L_i - w = 0, \tag{5.23}$$

$$\partial\Pi_i/\partial x_{ij} = \partial Y_i/\partial x_{ij} - p_j = 0, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{5.24}$$

(5.24) giver efterspørgselsfunktionen

$$x_{ij} = L_i(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} p_j^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{5.25}$$

Den samlede efterspørgsel efter inputvare j bliver altså

$$X_j^d = \sum_i x_{ij} = L_0\,(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}\,p_j^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \text{ hvor } L_0 \equiv \sum_i L_i$$

Prisfastsættelsesproblemet for iværksætter j er herefter:

$$\begin{aligned}\max_{p_j} \pi_j &= (p_j - 1)X_j \text{ ub.} \\ X_j &= L_0\,(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}\,p_j^{-\frac{1}{1-\alpha}}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Her kan man indsætte bibetingelsen i udtrykket for π_j, differentiere mht. p_j og sætte lig nul. Alternativt kan vi benytte vor almindelige viden om, at en monopolists profitmaksimerende pris opfylder reglen $MR = MC$, dvs. $p_j(1 + 1/E_{X_j,p_j}) = 1$, hvor efterspørgslens priselasticitet $E_{X_j,p_j} er - 1/(1-\alpha)$ fra (5.26). Indsætning giver

$$p_j = 1/\alpha \equiv p > 1. \tag{5.27}$$

Pga. monopolet er prisen større end $MC = 1$. Pga. den mængde-uafhængige priselasticitet er prisen konstant. Og pga. symmetrien på tværs af iværksættervirksomhederne, er prisen uafhængig af j.

Indsætning i (5.26) giver

$$X_j = L_0 A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \equiv X, \tag{5.28}$$

hvorved

$$\pi_j = (1/\alpha - 1)X \equiv \pi. \tag{5.29}$$

Iværksættervirksomhed nr. j (eller patent nr. j) får iflg. (5.22) nutidsværdien (= markedsværdien)

$$V_j(t) = (1/\alpha - 1)L_0 A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} d\tau \equiv V(t). \tag{5.30}$$

Alle iværksættervirksomheder tager altså samme pris p, sælger samme løbende mængde X, får samme løbende indtjening π og har samme nutidsværdi $V(t)$.

c) Som udgangspunkt for bestemmelsen af $\dot{c}/c$ i generel ligevægt har vi fra løsningen af husholdningens problem i opg. 2

$$\dot{c}_t / c_t = (1/\theta)(r_t - \rho). \tag{5.31}$$

Den repræsentative husholdnings formue er $a = NV/L$. I generel ligevægt er

$$\sum_i L_i \equiv L_0 = L, \text{ og} \tag{5.32}$$

$$\sum_i x_{ij} = X_j = LA^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}, \quad j = 1, 2, ..., N, \tag{5.33}$$

fra (5.28). Ligevægt kræver desuden, at $V(t) \leq \eta$, da der i modsat fald ville være overefterspørgsel efter ressourcer og efter finansiel kapital til opfinderaktivitet. Ligevægt med *positiv* vækst ($\dot{N} > 0$) kræver præcis

$$V(t) = \eta. \tag{5.34}$$

(5.22) er ækvivalent med no-arbitrage-betingelsen

$$\frac{\pi(t) + \dot{V}(t)}{V(t)} = r(t) \text{ for alle } t. \tag{5.35}$$

Indsætning af (5.34) og dernæst (5.29) giver

$$r(t) = \pi/\eta = (1/\eta)(1/\alpha - 1)X \equiv r, \tag{5.36}$$

en positiv konstant. Indsættes dette sammen med (5.28) i (5.31), fås

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{L}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} - \rho\right] \equiv \gamma. \tag{5.37}$$

Skal dette være foreneligt med antagelsen om positiv vækst, må vi altså forudsætte parameter-restriktionen

$$\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{L}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} > \rho. \tag{5.38}$$

Til sikring af, at husholdningens problem er veldefineret, kræves tillige parameter-restriktionen

$$(1-\theta)\gamma < \rho, \tag{5.39}$$

hvor γ er givet ved (5.37). Men (5.39) er allerede opfyldt, når $\gamma > 0$, da $\theta > 1$, og $\rho > 0$.

d) Den tidsuafhængige realrente i (5.36) tyder på, at der er tale om en AK-lignende model. Dette bekræftes, når vi udleder den aggregerede produktionsfunktion. Vi har nemlig fra (5.25) og (5.27), at $x_{ij} = x_i$ for alle j. Derfor kan (3.1) skrives $Y_i = AL_i{}^{1-\alpha}Nx_i{}^{\alpha}$, dvs.

$$y_i = AN(x_i/L_i)^{\alpha}. \tag{5.40}$$

Profitmaksimeringsbetingelsen (5.23) giver $\partial Y_i/\partial L_i = (1-\alpha)AN(x_i/L_i)^{\alpha} = w$, der viser, at alle virksomheder vælger samme $x_i/L_i = f(w)$. Dermed er $x_i = f(w)L_i$ for alle i. Markedsclearing giver $X = \sum_i x_i = f(w)L$ for alle i. Derfor er $x_i/L_i = f(w) = X/L$, hvor X er givet ved (5.28). Indsætning i (5.40) giver

$$Y = \sum_i Y_i = \sum_i y_i L_i = LAN(X/L)^{\alpha} = AL^{1-\alpha}X^{\alpha}N = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}LN \equiv \bar{A}N, \tag{5.41}$$

hvor vi har brugt (5.28). Den aggregerede nettoproduktion er altså $Y - Y_X = Y - NX = (\bar{A} - X)N$, dvs vi har den for AK-lignende modeller karakteristiske egenskab, at der på aggregeret niveau er proportionalitet mellem output og producerbart input (her vidensbeholdningen N).

Nettoproduktionen anvendes til hhv. forbrug og investering i F&U (opfinderaktivitet), dvs. $Y - Y_X = C + Y_R$. Indsætning af (3.2) og ordning giver $\dot{N} =$

$(1/\eta)\left[(\bar{A}-X)N-C\right]$, der på standardformen for en 1. ordens lineær differentialligning bliver:

$$\dot{N}-\frac{1}{\eta}(\bar{A}-X)N=-C_0e^{\gamma t} \tag{5.42}$$

fra (5.37). Forbrugsniveauet $C_0 \equiv c_0L$ er endogent, men fra vort almindelige kendskab til AK-lignende modeller ved vi, at den eneste løsning af (5.42), der overholder både (NPG) og (TVC), er den, hvor

$$\dot{N}/N=\gamma \text{ for alle } t. \tag{5.43}$$

Dermed er iflg. (5.42) $C_t/N_t=\bar{A}-X-\eta\gamma$ for alle t.

Da

$$y\equiv Y/L=\bar{A}N/L, \tag{5.44}$$

vokser y med samme rate som N, dvs. raten γ. Igen "no transitional dynamics".

En knapt så matematisk fremstilling er også OK.

e) Af (5.37) fås:

$\partial\gamma/\partial\rho=-1/\theta<0$. Større utålmodighed $\Rightarrow$ lavere "opsparingstilbøjelighed" $\Rightarrow$ mindre satsning af ressourcer på F&U.

$\partial\gamma/\partial\theta=-\frac{1}{\theta^2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{L}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}-\rho\right]=-\frac{\gamma}{\theta}<0$. Større ønske om forbrugsudjævning $\Rightarrow$ lavere villighed til at udskyde forbrug $\Rightarrow$ mindre satsning af ressourcer på F&U.

$\partial\gamma/\partial A=\frac{L}{\theta\alpha\eta}A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}>0$. Højere faktorproduktivitet $\Rightarrow$ højere afkastrate på opsparing $\Rightarrow$ større opsparing på aggregeret niveau (hvor den negative substitutionseffekt og formueeffekt på forbruget dominerer over den positive indkomsteffekt) $\Rightarrow$ større satsning af ressourcer på F&U.

$\partial\gamma/\partial\eta=-\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{L}{\eta^2}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}<0$. Jo større F&U omkostningen er, jo mindre F&U.

$\partial\gamma/\partial L=\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{1}{\eta}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}>0$. Jo større L er, jo lavere er pr. capitaomkostningen, η/L, ved F&U (et ikke-rivaliserende gode), og jo større bliver satsningen på F&U (en skalaeffekt på vækstraten). For to forskellige (isolerede) lande, der er ens mht. alle parametre bortset fra L, siger modellen, at landet med størst L vil have højest vækstrate.

Virkningen af et øget α afhænger på indviklet måde af α og A.

f) Monopolprisfastsættelsen på specialiserede inputvarer medfører, at prisen overstiger grænseomkostningen (der er 1) ved disses fremstilling. Dette indebærer inefficiens og dermed fravær af Pareto-optimalitet. Det ville ikke være nogen løsning af afskaffe retten til tage patent, da denne ret netop er nødvendig for at tilskynde virksomhederne til F&U. Men en relevant politik kunne være at give et tilskud, s, til virksomhedernes køb af specialiserede inputvarer og finansiere dette tilskud ved en ikke-forvridende skat (en lump-sum skat eller en skat, der i denne model *virker* som en lump-sum skat, fx. en lønindkomstskat). Så ville brugerprisen blive $\bar{p} = (1-s)p = (1-s)/\alpha$. Efficiens kan nu opnås ved at vælge s sådan, at $\bar{p} = MC = 1$, dvs. $s = 1 - \alpha$. Herved opnås ikke blot en Pareto-optimal ressourceallokering, men faktisk samme ressourceallokering, som ville blive valgt af en samfundsplanlægger, der som kriteriefunktion har den repræsentative husholdnings intertemporale nyttefunktion. Tilskuddet løser nemlig i denne model ikke blot det statiske inefficiensproblem, at der er en samfundsmæssigt set for lav efterspurgt mængde af specialiserede inputvarer. Tilskuddet løser også det dynamiske inefficiensproblem, at denne for lave efterspørgsel medfører et for ringe incitament til F&U, hvorved der bliver anvendt for få ressourcer på F&U, og følgen bliver en for lav vækstrate.

Argumentet for dette er, at den statiske og den dynamiske inefficiens har samme kilde ($p > MC$), og denne kilde fjernes med tilskuddet. Man kan også give en mere detaljeret argumentation ud fra en eksplicit løsning af samfundsplanlæggerens problem. Dette undlades her.

Et alternativ til omkostningstilskuddet s er et produktionstilskud σ til basisvarevirksomhederne. Ved at producere Y_i får virksomhed nr. i da provenuet $(1+\sigma)Y_i$, dvs. en profitmaksimeringsbetingelse bliver $(1+\sigma)\partial Y_i/\partial x_{ij} = p_j = 1/\alpha$. Den ønskede egenskab, $\partial Y_i/\partial x_{ij} = 1$, opnås ved at vælge $\sigma = 1/\alpha - 1$.

g) Da modellen indebærer steady state fra starten og altså ikke har nogen tilpasningsdynamik, fører den til forudsigelser, der bl.a. strider mod den empiriske iagttagelse "betinget konvergens". For en gruppe lande, der har nogenlunde samme parameterværdier, vil der iflg. modellen ikke være tendens til, at lande, der er "foran" i udviklingen (dvs. har høj y_0), har lavere vækstrate end lande, der er bagud i udviklingen (dvs. har lav y_0). Men det er der empirisk.

h) Nogle mulige udvidelser/modifikationer af modellen:

1. Tidsbegrænset monopolmagt. Dette kan skyldes begrænset varighed af patenter, vanskeligheder med at hemmeligholde know-how, konkurrenters introduktion af nære substitutter m.m. Dette fører til tilpasningsdynamik som følge af, at der fremkommer *to* beholdningsvariable i det dynamiske system, nemlig udover N^m, der er antallet af effektive patenter, også N^c, der er antallet af specialiserede inputvaretyper, hvortil der ikke længere er knyttet monopol. I den stokastiske model for dette, som er med i pensum, bliver tilpasningsdynamikken dog ret indviklet (og i øvrigt ikke undersøgt nærmere), så det er svært at sige, hvad det betyder i forhold til "betinget β-konvergens".

2. Positive eksterne effekter af F&U. Dette kan indbygges i modellen ved at erstatte (3.2) med fx

$$\dot{N} = \frac{1}{\eta} L_R N, \tag{5.45}$$

hvor $\eta > 0$ stadig er en konstant, mens L_R er den del af arbejdsstyrken, der allokeres til F&U (dvs. $L = L_Y + L_R$). Jo større samfundets tekniske viden (målt ved N) er, jo mindre er den krævede arbejdsindsats (η/N) for at lave én ny opfindelse. Under antagelse af at de enkelte opfindelsers bidrag til N ikke kan privatiseres, indebærer dette en positiv ekstern effekt af F&U. En relevant økonomisk politik vil nu indebære ikke blot et omkostningstilskud til aftagerne af specialiserede inputvarer, men også et tilskud til F&U. Men der bliver igen ingen tilpasningsdynamik. Så i relation til spørgsmålet om "betinget β-konvergens" indebærer dette ingen forbedring af modellen.

3. Specialiserede inputvarer som (fysiske) kapitalgoder i stedet for ikke-varige inputgoder. Dette svarer til Romers 1990 model. Der er nu *to* beholdningsvariable i systemet, dels N, dels mængden af fysisk kapital, K. Derfor opstår der en tilpasningsdynamik a la den i B&S kap. 5 beskrevne, og modellen bliver forenelig med "betinget β-konvergens".

5.4 Opg. 4.

Kilde: Primært B&S, kap. 6, samt Romer 1990, Groth 1992 og Jones 1995.

En alternativ udgave af opfindelses-produktionsfunktionen er allerede omtalt i forbindelse med pkt. 2 under h) i opgave 3. I Jones 1995 og Groth 1992 introduceres specifikationer a la

$$\dot{N} = \beta L_R N^{\varphi}, \tag{**}$$

hvor β og ϕ er parametre, $\beta > 0$, $\phi \leq 1$. Den interessante parameter er ϕ :

- $\phi = 1$ svarer til Romer 1990: "proportional spillover" fra vidensbeholdningen N,
- $0 < \phi < 1$ aftagende, men positiv spillover,
- $\phi = 0$ ingen spillover,
- $\phi < 0$ "idé-udtømning", "the fishing out case" (de nemmeste opfindelser laves først, hvorved det bliver sværere og sværere at lave nye opfindelser).

Kommentar: Tilfældet $\phi > 0$ kan betragtes som udtryk for, at inspirations- og kombinatorik-effekten af en stor vidensbeholdning N dominerer over "idé-

udtømningseffekten". I tilfældet $\phi < 0$ er det omvendt. Kun hvis $\phi = 1$, bliver der endogen vækst i snæver forstand. Med $\phi < 1$ opstår semi-endogen vækst (steady state vækstraten i y bliver $\phi n/(1-\phi)$, hvor n er befolkningsvækstraten). Med $\phi < 1$ forsvinder altså den empirisk problematiske skalaeffekt på vækstraten, og der bliver kun en skalaeffekt på *niveau* (stadig som følge af, at teknisk viden er et ikke-rivaliserende gode).

Man kan udbygge (**) ved at tilføje "overlapnings- og gentagelseseffekter": jo flere andre virksomheder, der laver F&U, jo større tendens er der til, at den enkeltes F&U blot frembringer, hvad også frembringes af en eller flere andre. Der bliver stadig semi-endogen vækst.

I andre udvidelser benyttes $\phi = 0$ i (**), der til gengæld suppleres med en fortolkning af L_R som input af humankapital. Dette udbygges så med en særskilt ligning for dannelse af humankapital, hvor der er positivt feedback fra det generelle vidensniveau N. Herved bliver modellen, trods $\phi = 0$, i stand til at frembringe endogen vækst i snæver forstand igen, og det viser sig, at der bliver en *dæmpet* skalaeffekt på vækstraten.

I B&S kap. 7 introduceres opfindelser af *bedre* kvaliteter af givne produkttyper, således at gamle kvaliteter tenderer til at blive udkonkurreret. Samtidig introduceres *usikkerhed* i opfindelses-produktionsfunktionen. I sig selv er dette en tilnærmelse til virkeligheden, men måden usikkerheden indføres på er ret forenklet. Den næste opfindelses ankomst beskrives ved en Poisson-proces, hvor Poisson-ankomstraten bl.a. er en voksende funktion af, hvor mange ressourser, der anvendes på F&U.