Videregaende vækstteori. Note 9.

20/3 2002. Christian Groth

Økonomisk kandidateksamen 1996 II:

Videregående vækstteori

4 timers prøve uden hjælpemidler. Alle fire opgaver skal besvares.

Opg. 1 og 3 vægtes hver 10 %, opg. 2 vægtes 60 %, og opg. 4 vægtes 20 %.

1 Opg. 1.

Giv en kort redegørelse for begreberne “absolut konvergens” og “betinget konvergens” inden for vækstforskningen.

2 Opg. 2.

Betragt en lukket markedsøkonomi med L nyttemaksimerende husholdninger, M profitmaksimerende virksomheder og en offentlig sektor, der stiller en ikke-rivaliserende produktiv ydelse i mængden G pr. tidsenhed til rådighed gratis for den private sektor. Ydelsen finansieres med en proportional indkomstskat. L og M er positive konstanter. Hver husholdning udbyder uelastisk 1 enhed arbejde pr. tidsenhed. Tilsammen producerer virksomhederne en homogen outputmængde på Y pr. tidsenhed, og denne anvendes til husholdningernes forbrug $C \equiv cL$, til G og til investering i fysisk kapital K, dvs. $Y = C + G + \dot{K}$, idet kapitalnedslidningsraten forenklende er sat lig nul. De variable er implicit daterede, og $\dot{K}$ er differentialkvotienten af K mht. tiden t. Initialværdien $K_0 > 0$ er given. Husholdningerne ejer realkapitalen og lejer denne ud til virksomhederne. Husholdningerne kan låne eller låne ud til den gældende reale markedsrente r. Der er perfekt forudseenhed.

Den offentlige sektor balancerer sit budget. Den benytter en given tidsuafhængig indkomstskattesats τ, $0 < \tau < 1$, og opnår altså skatteprovenuet $T = \tau(wL + RK + \Pi)$, hvor w er reallønnen, R den reale lejesats for kapital, og Π er eventuel ren profit.

Produktionsfunktionen for virksomhed nr. i er givet ved

$$Y_i = AK_i^{\alpha}(GL_i)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, A > 0, \qquad i = 1, 2, ..., M, \tag{2.1}$$

hvor α og A er givne konstanter, og Y_i, K_i og L_i er hhv. virksomhedens output, kapitalinput og arbejdsinput. Der er fuldkommen konkurrence (og clearing) på alle markeder.

a) Kommenter (2.1).

b) Bestem den kapitalintensitet $k_i \equiv K_i/L_i$, som virksomhed nr. i vil vælge.

c) Bestem i den generelle ligevægt G, R, r og w på et vilkårligt tidspunkt. Kommenter.

d) Hvad bliver den rene profit Π i den generelle ligevægt, og hvad bliver forholdet mellem Y og K (eller mellem $y \equiv Y/L$ og $k \equiv K/L$)? Kommenter.

e) Antag at alle husholdningerne har samme elementarnyttefunktion

$$\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta},$$

hvor θ er en positiv konstant. Husholdningerne har uendelig tidshorisont og en konstant tidspræferencerate $\rho > 0$. Opstil den enkelte husholdnings beslutningsproblem under hensyntagen til den givne beskatningsform. Udled den vækstrate i forbruget, som husholdningen vil vælge, og indsæt resultatet fra pkt. c).

f) Kald den fremkomne vækstrate i forbruget for γ. Det er relevant at forudsætte, at $\gamma > 0$, og $\rho > (1-\theta)\gamma$. Hvorfor? Vis, at den sidste ulighed er ensbetydende med, at $\gamma < (1-\tau)r$, hvilket kan vise sig nyttigt senere.

g) Udviklingen i k ($\equiv K/L$) kan ud fra modellen vises at følge differentialligningen

$$\dot{k} - Bk = -c_0 e^{\gamma t}, \qquad \text{hvor } B \equiv (1-\tau)A^{1/\alpha}(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{*}$$

Vis dette. Bestem derefter c_0 (*vink*: se fodnote [1]). Kommenter.

h) Bestem vækstraten i $y \equiv Y/L$. Hvorledes afhænger den af L? Kommenter.

i) Bestem den værdi af τ, der gør γ maksimal inden for de givne institutionelle rammer. Kommenter.

[1] (*) har løsningen $k_t = \left(k_0 - \frac{c_0}{B-\gamma}\right) e^{Bt} + \frac{c_0}{B-\gamma} e^{\gamma t}$.

j) Vil den under pkt. i) fundne værdi af τ være *velfærdsmaksimerende* inden for de givne institutionelle rammer? Hvad ville svaret herpå være, hvis der i stedet for indkomstskat var tale om en proportional formueskat med satsen τ, og pkt. i) var besvaret herudfra? (Det er nok at besvare disse to spørgsmål ud fra almindelig viden snarere end egentlige udledninger, men en antydning af, hvordan svarene kan udledes, vil være fint).

k) Opstil og løs samfundsplanlæggerens problem under antagelse af, at samfundsplanlæggeren har samme kriteriefunktion som den repræsentative husholdning, og at de eneste restriktioner er dem, der hidrører fra teknologi, initialressourcer og dynamisk ressourcebegrænsning.

l) Drøft resultatet fra pkt. k) i forhold til, hvad der gælder for markedsøkonomien med proportional indkomstbeskatning.

3 Opg. 3.

Giv en kort, begrundet vurdering af følgende udsagn: "Kapitalindkomstskat formindsker det disponible afkast på opsparing og bør derfor altid undgås".

4 Opg. 4.

Nævn nogle ligheder og forskelle mellem Uzawa-Lucas-modellen og nogle af de forskellige Romer-modeller fra pensum.

5 Løsning

5.1 Opg. 1.

Kilde: B&S, afsnit 1.2.8.

I den empirisk orienterede vækstforskning har man bl.a. ud fra nationalregnskabsstatitik og andre data for OECD-landene og efterhånden temmelig mange u-lande undersøgt, hvorvidt de forskellige hypoteser om konvergens holder. Lad os ligesom B&S starte med begrebet *absolut konvergens* i betydningen absolut β-konvergens.

Man siger, at der foreligger *absolut β-konvergens*, hvis der observeres en klar negativ sammenhæng mellem landenes initialniveau for y (indkomst pr. indbygger eller pr. arbejdstime) og y's efterfølgende gennemsnitlige vækstrate g (beregnet over en længere årrække). I den enkleste udgave er regressionsligningen

$$g = \alpha - \beta \log y_0 + u \qquad (u \text{ hvid støj}). \tag{**}$$

Hvis estimatet $\hat{\beta} > 0$ (signifikant), er der absolut β-konvergens.

Når man har interesseret sig for dette spørgsmål, er det bl.a., fordi svaret kunne være af betydning for, om indkomstkløften mellem landene tenderer til at mindskes over tid. Tager man en stor gruppe forskelligartede lande (B&S ser på 118 lande 1960-85), viser det sig klart, at absolut β-konvergens må forkastes. Ved nærmere eftertanke er dette ikke overraskende. Hypotesen om absolut β-konvergens kan tolkes som en uigennemtænkt generalisering af, hvad der ud fra en stor del af vækstteorien må formodes at gælde for det enkelte land over tid, til hvad der gælder for et tværsnit af lande. For et tværsnit af lande vil nemlig antagelig gælde, at landene ikke alene er forskellige mht. initialværdi af y, men også mht. de for steady state relevante parametre (incl. teknologi). I B&S belyses dette ud fra Solowmodellen. Et fattigt land kan herudfra i bedste fald kun forventes at have høj vækst i y, hvis dets y (eller snarere output pr. enhed *effektiv* arbejdskraft) er langt under landets *egen* steady state position. Hypotesen om *betinget konvergens* tager højde herfor. Man siger, at der foreligger *betinget β-konvergens*, hvis der, når de for steady state relevante parametre (incl. teknologi) er holdt konstant, er en klar negativ sammenhæng mellem initialværdi af y og gennemsnitlig vækstrate i y (over en længere efterfølgende årrække). Denne hypotese bekræftes af empirien. B&S viser bl.a., at når man ser på OECD-landene for sig (lande der kan formodes at være nogenlunde ens mht. parametre), bliver $-\hat{\beta}$ i (**) signifikant negativ.

Ovenstående begreber om absolut og betinget *β-konvergens* må ikke sammenblandes med et andet konvergensbegreb, der betegnes *σ-konvergens.* En samling af lande siges at udvise *σ-konvergens*, hvis spredningen i (logaritmen til) y (eller et andet passende ulighedsmål) på tværs af landene aftager systematisk over tid. Traditionelt overså man, at β-konvergens ikke behøver implicere σ-konvergens. Årsagen er, at tingene altid er influeret også af tilfældige påvirkninger, og så vil observeret β-konvergens kunne være udtryk for, at landene blot bytter rangorden i forhold til hinanden på mere eller mindre tilfældig måde, mens spredningen på (logaritmen til) y ikke nødvendigvis aftager over tid.

5.2 Opg. 2.

Kilde: B&S, kap. 4, især afsnit 4.4, samt Alesina & Rodrik.

a) (2.1) er en Cobb-Douglas-produktionsfunktion med konstant skalaafkast mht. kapital og arbejdskraft. Arbejdseffektiviteten ses at være proportional med den offentlige ydelse G. Der er tale om en ikke-rivaliserende ydelse, da hele G og ikke G/L indgår. Kapitalens grænseprodukt er faldende ($\alpha < 1$) for givet G, men hvis G vokser i samme takt som K, så neutraliseres denne tendens til fald, og endogen vækst kan opstå. Sagt på en anden måde: Alle virksomheder har samme produktionsfunktion, og produktionselasticiteten mht. de *producerbare* inputs tilsammen er netop 1, dvs. endogen vækst (i streng forstand) er mulig.

Den samlede model er en Barro-model med produktive offentlige ydelser.

b) Virksomhedens valg af k_i er bestemt ud fra løsning af profitmaksimeringsproblemet

$$\max_{K_i, L_i} \Pi_i = AK_i^{\alpha}(GL_i)^{1-\alpha} - RK_i - wL_i.$$

FOC:

$$\partial \Pi_i / \partial K_i = \alpha A K_i^{\alpha-1}(GL_i)^{1-\alpha} - R = 0,$$
$$\partial \Pi_i / \partial L_i = (1-\alpha) A K_i^{\alpha}(GL_i)^{-\alpha} G - w = 0.$$

Af den første FOC finder vi, idet $k_i \equiv K_i/L_i$,

$$k_i = (\alpha A/R)^{1/(1-\alpha)} G. \tag{5.1}$$

(En del besvarelser forveksler indkomstskat med en produktionsskat).

c) I generel ligevægt er der clearing på faktormarkederne, dvs.

$$\sum_i K_i = K, \text{ og} \tag{5.2}$$
$$\sum_i L_i = L. \tag{5.3}$$

Af (5.1) ses, at alle virksomheder vælger samme kapitalintensitet k_i, og i generel ligevægt må denne være lig $k \equiv K/L$, der er prædetermineret. Indsætning i (5.1) giver

$$R = \alpha A (G/k)^{1-\alpha}. \tag{5.4}$$

Men i den generelle ligevægt er også G endogen via den offentlige budgetrestriktion

$$G = T = \tau(wL + RK + \Pi),$$

så (5.4) er ikke det endelige facit. Da pr. definition $\Pi \equiv Y - (wL + RK)$, får vi

$$G = \tau(wL + RK + Y - wL - RK) = \tau Y, \tag{5.5}$$

hvor imidlertid både G og Y er endogene. Vi har $y_i \equiv Y_i/L_i = Ak_i^\alpha G^{1-\alpha} = Ak^\alpha G^{1-\alpha}$, og $Y = \sum_i Y_i = \sum_i y_i L_i = y_i \sum_i L_i = y_i L = Ak^\alpha G^{1-\alpha} L = Ak^\alpha (\tau Y)^{1-\alpha} L$, hvorfor

$$Y = Ak^\alpha G^{1-\alpha} L = (AL)^{1/\alpha} \tau^{(1-\alpha)/\alpha} k \tag{5.6}$$

og

$$y \equiv Y/L = A^{1/\alpha} (\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} k. \tag{5.7}$$

(5.6) indsat i (5.5) giver løsningen for G,

$$G = (\tau AL)^{1/\alpha} k. \tag{5.8}$$

Indsætning af (5.8) i (5.4) giver

$$R = \alpha A^{1/\alpha} (\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{5.9}$$

I generel ligevægt med perfekt forudseenhed må afkastraten ved alternative formueplaceringer være ens. Afkastraten ved at besidde realkapital er $(RK - \delta K)/K = R$, da $\delta \equiv 0$. Afkastraten ved at låne ud er realrenten r. I ligevægt må altså $R = r$, dvs.

$$r = \alpha A^{1/\alpha} (\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{5.10}$$

Fra den anden FOC under pkt. b) fås i generel ligevægt $w = (1-\alpha)Ak^\alpha G^{1-\alpha}$, der kombineret med (5.8) giver

$$w = (1-\alpha) A^{1/\alpha} (\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} k. \tag{5.11}$$

Vi ser, at r er tidsuafhængig, og at w er proportional med k (begge dele træk, der er karakteristiske for AK-lignende modeller).

d) Da der er konstant skalaafkast og fuldkommen konkurrence, må $wL + RK = Y$ og $\Pi = 0$. Formelt kan dette vises sådan: $w + Rk = (1-\alpha)Ak^\alpha G^{1-\alpha} +$

$\alpha AG^{1-\alpha}k^{\alpha} = [(1-\alpha)Ak^{\alpha} + \alpha Ak^{\alpha}]\, G^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}G^{1-\alpha} = y$ fra (5.6). Derfor fås $wL + RK = yL = Y$ og altså $\Pi(\equiv Y - (wL + RK)) = 0$, hvilket skulle vises.

Af (5.7) fås

$$\frac{y}{k} \equiv \frac{Y}{K} = A^{1/\alpha}(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} \equiv \bar{A}. \tag{5.12}$$

Vi ser, at teknologi og virksomhedsadfærd er sådan, at det aggregerede output-kapital-forhold bliver en konstant − endnu et karakteristisk træk ved AK-lignende modeller.

e) Set fra tidspunkt 0 er beslutningsproblemet

$$\max_{(c_t)} U_0 = \int_0^{\infty} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \quad \text{ub.} \tag{N}$$

$$c_t \geq 0,$$

$$\dot{a}_t = (1-\tau)(w_t + ra_t) - c_t, \qquad a_0 \text{ given,} \tag{5.13}$$

$$\lim_{t\to\infty} a_t e^{-(1-\tau)rt} \geq 0, \tag{NPG}$$

hvor a_t er husholdningens reale finansielle formue på tidspunkt t.

Løbende værdi-Hamiltonfunktionen bliver

$$H = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda\left[(1-\tau)(w + ra) - c\right],$$

hvor hjælpevariablen λ kan fortolkes som skyggeprisen på formue (langs den optimale bane). Første ordens betingelserne er

$$\partial H/\partial c = c^{-\theta} - \lambda = 0, \qquad \text{dvs. } c^{-\theta} = \lambda,$$

$$\partial H/\partial a = \lambda(1-\tau)r = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, \qquad \text{dvs. } (1-\tau)r = \rho - \dot{\lambda}/\lambda,$$

og den nødvendige transversalitetsbetingelse er

$$\lim_{t\to\infty} a_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0. \tag{TVC}$$

Logaritmisk differentiation mht. t i den første betingelse og indsætning af den anden giver den sædvanlige Keynes-Ramsey-regel

$$\dot{c}_t/c_t = (1/\theta)\left[(1-\tau)r - \rho\right]. \tag{5.14}$$

Ved at indsætte (5.10) og definitionen $\bar{A} \equiv A^{1/\alpha}(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha}$ fra (5.12) fås

$$\dot{c}_t/c_t = (1/\theta)\left[(1-\tau)\alpha\bar{A} - \rho\right] \equiv \gamma. \tag{5.15}$$

(Ang. spørgsmålet om *tilstrækkelige* betingelser for en løsning kan vi notere: Da Hamiltonfunktionen er konkav i (c, a), *vil* en bane, der opfylder de to FOCs samt (TVC), være en løsning af husholdningens problem).

f) Det er relevant at forudsætte

$$\gamma > 0 \tag{5.16}$$

for at sikre, at vækst overhovedet er mulig i modellen. For at sikre, at nytteintegralet konvergerer (så optimum er veldefineret), er det relevant at forudsætte

$$(1-\theta)\gamma < \rho. \tag{5.17}$$

Betragtes nemlig den tidsafhængige faktor i integranden i husholdningens kriteriefunktion,

$$z_t \equiv c_t^{1-\theta} e^{-\rho t},$$

har vi, at integralet vil konvergere, hvis og kun hvis vækstraten i z_t er asymptotisk negativ. Vi udregner derfor

$$\dot{z}_t / z_t = (1-\theta)(\dot{c}_t / c_t) - \rho = (1-\theta)\gamma - \rho,$$

der netop er negativ, hvis og kun hvis (5.17) er opfyldt.

Vi har $(1-\theta)\gamma < \rho \Longleftrightarrow \gamma < \theta\gamma + \rho$, hvor $\theta\gamma + \rho = (1-\tau)r$ fra (5.14). Altså er (5.17) ensbetydende med $\gamma < (1-\tau)r$.

g) Fra den givne tilgang-lig-anvendelse-ligning, $Y = C + G + \dot{K}$, haves

$$\begin{aligned} \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} = \frac{Y - G - C}{L} &= (1 - G/Y)y - c \\ &= (1-\tau)A^{1/\alpha}(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha}k - c_0 e^{\gamma t}, \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet hhv. $\tau = G/Y$, (5.12) og (5.14). Med den i opgaveteksten givne definition af B $(\equiv (1-\tau)\bar{A})$har vi dermed den lineære differentialligning (*). (Alternativt kan denne vises ud fra budgetbetingelsen (5.13)).

Løsningen af (*) er ifølge fodnote 1

$$k_t = (k_0 - \frac{c_0}{B-\gamma})e^{Bt} + \frac{c_0}{B-\gamma}e^{\gamma t}. \tag{5.18}$$

Fra pkt. f) har vi $\gamma < (1-\tau)r = (1-\tau)\alpha A^{1/\alpha}(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha} \equiv \alpha B < B$, da $\alpha < 1$. Men så må

$$c_0 = (B-\gamma)k_0, \tag{5.19}$$

hvor $B - \gamma > 0$ som netop vist. (5.19) følger af, at de to alternative muligheder, $c_0 < (B-\gamma)k_0$ og $c_0 > (B-\gamma)k_0$ kan udelukkes, fordi den første ulighed indsat i (5.18) medfører en udvikling, der kan vises at føre til modstrid med transversalitetsbetingelsen (TVC), og den sidste ulighed indsat i (5.18) kan vises at føre til modstrid med NPG-betingelsen (og i øvrigt strider den også imod ikke-negativitetskravet $k_t \geq 0$ for alle t).

Indsætning af (5.19) i (5.18) giver

$$k_t = \frac{c_0}{B-\gamma}e^{\gamma t} = k_0 e^{\gamma t}, \tag{5.20}$$

således at k fra starten vokser med samme konstante rate som c (endnu et for AK-lignende modeller karakteristisk træk).

h) Af (5.7) og (5.20) ses, at også y fra starten må vokse med raten γ. Der er altså ingen "transitional dynamics".

Af (5.15) og definitionen af $\bar{A}$ fås

$$\partial\gamma/\partial L = \frac{1}{\theta}(1-\tau)(1-\alpha)A^{1/\alpha}\tau^{(1/\alpha)-1}L^{(1/\alpha)-2} > 0.$$

Der foreligger altså en *skalaeffekt* på vækstraten: større arbejdsstyrke medfører (alt andet lige) større vækstrate. Årsagen er, at G er ikke-rivaliserende, hvorved en større arbejdsstyrke medfører, at G omkostningsfrit kan udnyttes af flere (eller at pr. capita-omkostningen ved at levere et givet G bliver mindre). Jo større L er, jo større bliver den effektive arbejdsindsats GL, og derved bliver også kapitalens grænseproduktivitet - og dermed vækstraten - større. (Hvis G havde været rivaliserende, ville hver arbejder i gennemsnit være udstyret med $g = G/L$, og produktet gL ville ikke automatisk vokse, når L vokser). Af (5.7) ses, at der også er en skalaeffekt på produktivitets*niveauet*.

i) For at finde den vækstmaksimerende værdi af τ udregnes $\partial\gamma/\partial\tau$.

$$\partial\gamma/\partial\tau = \frac{\alpha A^{1/\alpha}}{\theta}(\tau L)^{(1-\alpha)/\alpha}\left[\frac{1-\tau}{\tau}\frac{1-\alpha}{\alpha} - 1\right] \gtreqless 0 \text{ for hhv. } \frac{1-\tau}{\tau} \gtreqless \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

dvs. for hhv. $\tau \lesseqgtr 1-\alpha$. Figur 1 illustrerer.

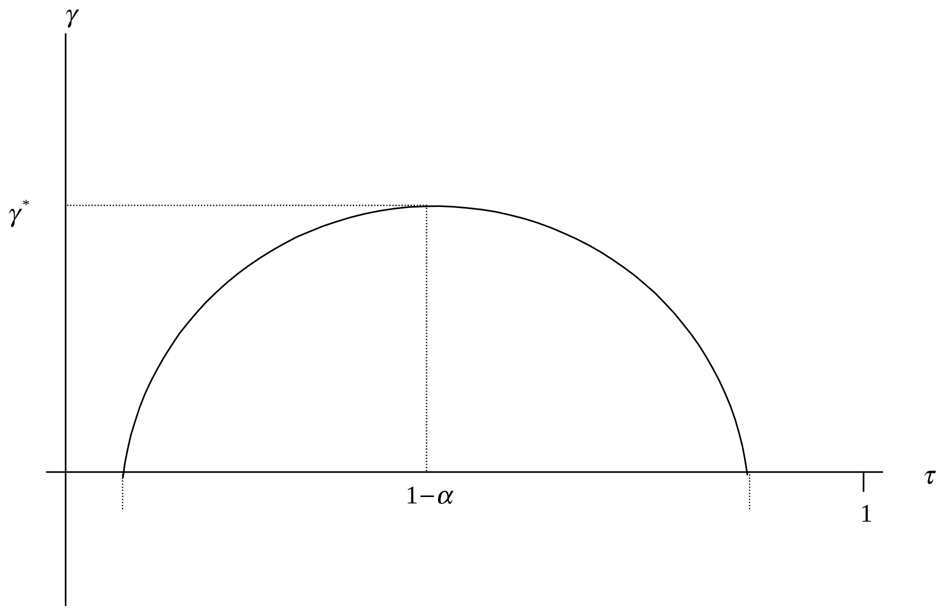

Figure 1:

Baggrunden for dette resultat er, at en stigning i skattesatsen τ har to modsatrettede effekter.

$$\tau \uparrow \Rightarrow \begin{cases} G/Y \uparrow \Rightarrow G/k \uparrow \Rightarrow R \uparrow \Rightarrow r \uparrow \Rightarrow \gamma \uparrow, \\ \quad 1-\tau \downarrow \Rightarrow (1-\tau)r \downarrow \Rightarrow \gamma \downarrow . \end{cases}$$

Når $\tau < 1-\alpha$, dominerer den første effekt, dvs. den produktive effekt, men når $\tau > 1-\alpha$, dominerer den sidstnævnte effekt, dvs. forvridningseffekten. Den kritiske værdi $\tau = 1-\alpha$ er faktisk betingelsen for statisk efficiens. Statisk efficiens kræver jo MB = MC, dvs. $\partial Y/\partial G = 1$ (den marginale enhed af G skal netop bidrage med lige så meget som den beslaglægger). Og fra $Y = AK^{\alpha}(GL)^{1-\alpha}$, jf. (5.6), følger

$$\begin{aligned} \partial Y/\partial G &= (1-\alpha)AK^{\alpha}G^{-\alpha}L^{1-\alpha} = (1-\alpha)Y/G \\ &= 1, \text{ hvis og kun hvis } G/Y(=\tau) = 1-\alpha. \end{aligned} \tag{5.21}$$

(Det er dog et specielt træk ved Cobb-Douglas-produktionsfunktionen, at betingelsen for statisk efficiens falder sammen med betingelsen for maksimal vækstrate i markedsøkonomien med proportional indkomstbeskatning).

j) Ja, $\tau = 1-\alpha$ er også den velfærdsmaksimerende skattesats (den der giver højest tilbagediskonteret nytte til den "repræsentative" husholdning) inden for de givne institutionelle rammer. Hvis der i stedet var tale om proportional formuebeskatning, ville den velfærdsmaksimerende skattesats være *højere* end den vækstmaksimerende (der i øvrigt ikke i dette tilfælde er $1-\alpha$, jf. Alesina & Rodrik)[2]. Det første kan vises ved at indsætte $c_t = c_0 e^{\gamma t}$ i nytteintegralet U_0 og integrere. Vi får

$$U_0 = \frac{c_0^{1-\theta}}{1-\theta} \cdot \frac{1}{\rho - (1-\theta)\gamma} - \frac{1}{(1-\theta)\rho},$$

hvor i tilfældet med proportional indkomstbeskatning

$$c_0 = (B-\gamma)k_0 = \left[(1-\tau)\frac{r}{\alpha} - \gamma\right] k_0 = \left[\frac{\theta\gamma + \rho}{\alpha} - \gamma\right] k_0 = \frac{(\theta-\alpha)\gamma + \rho}{\alpha} k_0.$$

Man får $\partial U_0 / \partial \gamma > 0$ (når $\gamma > 0$ og $\rho > (1-\theta)\gamma$). Dvs. γ skal vælges så høj som muligt, hvilket jo netop kræver $\tau = 1-\alpha$. I tilfældet med proportional formuebeskatning kan en tilsvarende metode benyttes. Kun en ren kapitalist (ingen arbejdsindkomst) ville foretrække den vækstmaksimerende skattesats. Den "repræsentative" husholdning har både kapital- og arbejdsindkomst og foretrækker derfor en højere skattesats, da en øget skattesats kun vil have en (negativ) 2. ordens effekt på *vækstraten* i indkomst, men en positiv 1. ordens effekt på lønindkomstens *niveau.* (Denne besvarelse er matematisk mere detaljeret end det naturligt kan forventes i en eksamenssituation).

k) Idet den aggregerede produktionsfunktion er som angivet lige før (5.21), er samfundsplanlæggerens problem:

$$\begin{aligned}
&\max_{(c_t, G_t)} U_0 = \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \qquad \text{ub.} \\
&\quad c_t \geq 0, \; G_t \geq 0, \\
&\quad \dot{K}_t = Y_t - G_t - c_t L, \qquad K_0 \text{ given}, \qquad Y_t = A K_t^\alpha (G_t L)^{1-\alpha}, \\
&\quad K_t \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Bemærk, at da G er et ikke-rivaliserende gode, er det bekvemt at formulere samfundsplanlæggerens problem i "aggregerede termer" og ikke i "pr. capita-termer".

Løbende værdi-Hamiltonfunktionen bliver

$$H = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda (Y - G - cL),$$

[2] For at man entydigt kan tale om, hvad der er "velfærdsmaksimerende" i markedsøkonomien, må alle husholdninger ikke alene være ens mht. præferencer, men også mht. initialressourcer.

hvor hjælpevariablen λ kan fortolkes som skyggeprisen på kapital (langs den optimale bane). Førsteordensbetingelserne er

$$\begin{aligned}
&\partial H/\partial c = c^{-\theta} - \lambda L = 0, && \text{dvs. } c^{-\theta} = \lambda L, \\
&\partial H/\partial G = \lambda(\frac{\partial Y}{\partial G} - 1) = 0, && \text{dvs. } \frac{\partial Y}{\partial G} = (1-\alpha)\frac{Y}{G} = 1 \text{ eller } \frac{G}{Y} = 1-\alpha, \\
&\partial H/\partial K = \lambda\frac{\partial Y}{\partial K} = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, && \text{dvs. } \frac{\partial Y}{\partial K} = \rho - \dot{\lambda}/\lambda,
\end{aligned}$$

og transversalitetsbetingelsen er

$$\lim_{t\to\infty} K_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0. \tag{TVC*}$$

Logaritmisk differentiation mht. t i den første betingelse og indsætning af den tredje giver den sædvanlige Keynes-Ramsey-regel

$$\dot{c}_t/c_t = (1/\theta)(\frac{\partial Y}{\partial K} - \rho), \tag{5.23}$$

hvor

$$\partial Y/\partial K = \alpha A (G/K)^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = \alpha Y/K. \tag{5.24}$$

Fra første del af (5.6) fås ved indsætning af $G = (1-\alpha)Y$ og løsning for Y

$$Y = A^{1/\alpha}\left[(1-\alpha)L\right]^{(1-\alpha)/\alpha} K \equiv \tilde{A}K. \tag{5.25}$$

Bemærk, at med denne definition af $\tilde{A}$ er $\tilde{A}$ lig den værdi, som $\bar{A}$ antager, når $\tau = 1-\alpha$, jf. (5.12), mens $B \equiv (1-\tau)\bar{A} = \alpha\bar{A} = \alpha\tilde{A}$, når $\tau = 1-\alpha$.

(5.22) kan nu skrives

$$\dot{K} = (1 - G/Y)Y - cL = \alpha Y - cL = \alpha\tilde{A}K - cL \tag{5.26}$$

fra (5.25). Indsættes (5.25) i (5.24), fås

$$\partial Y/\partial K = \alpha\tilde{A}, \tag{5.27}$$

der indsat i (5.23) giver

$$\dot{c}_t/c_t = (1/\theta)(\alpha\tilde{A} - \rho) \equiv \gamma_s. \tag{5.28}$$

Herefter kan (5.26) skrives

$$\dot{K} - \alpha\tilde{A}K = -c_0 e^{\gamma_s t}. \tag{5.29}$$

Det er bekvemt at skrive (5.15) på formen $\gamma = f(\tau)$ (altså γ er en funktion af τ). Lad $\gamma^* = f(1-\alpha)$, dvs. γ^* er den maksimale vækstrate i markedsøkonomien (med indkomstbeskatning). Så haves

$$\begin{aligned}\gamma &\leq \gamma^* = (1/\theta)\{\alpha^2 A^{1/\alpha}\left[(1-\alpha)L\right]^{(1-\alpha)/\alpha} - \rho\} = (1/\theta)(\alpha^2\tilde{A} - \rho) \\ &< (1/\theta)(\alpha\tilde{A} - \rho) \equiv \gamma_s, \end{aligned} \tag{5.30}$$

hvor første lighedstegn følger af (5.10), og andet lighedstegn følger af definitionen af $\tilde{A}$, mens sidste ulighedstegn følger af, at $0 < \alpha < 1$. For at sikre konvergens af nytteintegralet forudsætter vi, at (5.17) kan skærpes til

$$\rho > (1-\theta)\gamma_s. \tag{5.31}$$

Så er

$$\gamma_s < \theta\gamma_s + \rho = \alpha\tilde{A} \tag{5.32}$$

fra definitionen af γ_s.

Differentialligningen (5.29) har samme form som (*), hvorfor løsningsformlen i fodnote 1 kan benyttes igen. Vi får løsningen

$$k_t = (k_0 - \frac{c_0}{\alpha\tilde{A} - \gamma_s})e^{\alpha\tilde{A}t} + \frac{c_0}{\alpha\tilde{A} - \gamma_s}e^{\gamma_s t}. \tag{5.33}$$

Men så må $c_0 = (\alpha\tilde{A} - \gamma_s)k_0$ (hvor $\alpha\tilde{A} > \gamma_s$, jf. (5.32)). Dette følger af, at de to alternative muligheder, $c_0 < (\alpha\tilde{A} - \gamma_s)k_0$ og $c_0 > (\alpha\tilde{A} - \gamma_s)k_0$ kan udelukkes, fordi den første ulighed indsat i (5.33) kan vises at føre til modstrid med (TVC*), og den sidste ulighed indsat i (5.33) ses at komme i strid med ikke-negativitetskravet $K_t \geq 0$ for alle t (da $\alpha\tilde{A} > \gamma_s$). Herefter giver (5.33)

$$k_t = \frac{c_0}{\alpha\tilde{A} - \gamma_s}e^{\gamma_s t} = k_0 e^{\gamma_s t}.$$

(Ang. spørgsmålet om *tilstrækkelige* betingelser for en optimal løsning kan vi notere: Da den maksimerede Hamiltonfunktion kan vises at være konkav i K, *vil* en bane, der opfylder de tre FOC's samt (TVC*), være en løsning af samfundsplanlæggerens problem).

l) Både c, k og $y = \tilde{A}k$, jf. (5.25), vokser fra starten med samme konstante rate γ_s, og denne overstiger den maksimale vækstrate γ^* i markedsøkonomien (med proportional indkomstbeskatning), som det ses af (5.30). Årsagen er den forvridende indkomstskat, $\tau = 1-\alpha$, der jo bevirker, at den private afkastrate på opsparing bliver $(1-\tau)r = \alpha\alpha\tilde{A} < \alpha\tilde{A} = \partial Y/\partial K =$ den samfundsmæssige afkastrate på opsparing. I markedsøkonomien med indkomstskat bliver der altså underakkumuleret. Hvis derimod G kunne finansieres med lump-sum skatter, ville markedsøkonomien kunne realisere samfundsplanlæggerens løsning.

5.3 Opg. 3.

Kilde: B&S, afsnit 4.4.2.

Udsagnet ser helt bort fra fordelingsovervejelser. Desuden: selv i et samfund, hvor alle husholdninger tænkes at være ens, passer udsagnet ikke i alle tilfælde, nemlig ikke hvis der er negative eksterne effekter af kapitalakkumulation. Det kan der være, hvis fx "trængsel" gør sig gældende eller skadelige miljøeffekter. Så kan indkomstskat, herunder kapitalindkomstskat, være efficiensmæssigt *bedre* end lump-sum skatter. I opg. 2 var der (for givet G) ingen eksterne effekter, og så vil en kapitalindkomstskat virke forvridende, idet den private afkastrate ved opsparing bliver mindre end den samfundsmæssige afkastrate.

Mere generelt: Man kan ikke vurdere en bestemt beskatningsform uafhængigt af formålet med at opkræve skat: skaffe provenu til ønskværdige offentlige opgaver, minimere forvridninger (andre beskatningsformer kan også være forvridende), påvirke indkomstfordelingen.

5.4 Opg. 4.

Kilde: B&S, kap. 5 og 6, samt Lucas.

Af *ligheder* mellem U-L modellen og de forskellige Romer-modeller fra pensum kan nævnes:

a) De er alle modeller med endogen vækst i snæver forstand, dvs. langsigtsvækstraten i produktion pr. hoved er positiv uafhængigt af, om nogen eksogen faktor vokser. Med andre ord kan man sige, at kilden til væksten kommer "indefra".

b) Modsat Barro-modellen fra opg. 2, der er en ensektormodel med endogen vækst, er U-L modellen og de senere Romermodeller tosektormodeller, hvor de to sektorer er karakteriseret ved hver sin type output - alm. fysiske varer i sektor 1 og enten øget humankapital (U-L modellen) eller øget teknisk viden/nye tekniske "designs" (Romer-modellerne) i sektor 2. Teknologien og/eller markedsformen i de to sektorer er i almindelighed også forskellig.

Det fremgår, at der inden for Romer-modellerne må sondres:

(1) Romers 1986-model (Learning-by-investing): som et utilsigtet biprodukt af virksomhedernes investeringer i realkapital frembringes ny teknisk viden/øget arbejdseffektivitet, men dette biprodukt spredes straks til alle andre virksomheder og kan ikke monopoliseres af den enkelte virksomhed. Her er der altså positive eksterne effekter af at investere, og markedsøkonomien vil tendere til at underinvestere. Denne model er en ensektormodel og forenelig med fuldkommen konkurrence.

Romers senere modeller er tosektormodeller (kan også anskues som tresektormodeller), hvor der i sektor 2 opfindes nye tekniske designs, dvs. anvisninger på, hvordan nye specialiserede inputvarer kan indrettes. Når en virksomhed i sektor 2 har opfundet et nyt design, tager den (gratis) patent herpå og fremstiller og sælger derefter et specialiseret inputgode indrettet efter det pågældende design, idet virksomheden selv sætter prisen (den profitmaksimerende monopolpris). I sagens natur er der altså ufuldkommen konkurrence i sektor 2 (faktisk monopolistisk konkurrence af Chamberlins type). Disse Romermodeller er:

(2) Romers 1987-model: de specialiserede inputgoder er ikke-varige mellemprodukter, og der er ingen eksterne effekter af opfindelserne.

(3) Romers 1990-model i forenklet version: som (2), bortset fra at der er en positiv ekstern effekt af at lave en opfindelse.

(4) Romers "rigtige" 1990-model: som (3), bortset fra at de specialiserede inputgoder er *kapitalgoder*.

Nu til *forskellene* mellem U-L modellen og Romer-modellerne.

1. "Vækstmotoren" i U-L modellen er akkumulation af humankapital, mens "vækstmotoren" i Romer-model (1) er den eksterne effekt af investeringer i realkapital og i Romer-modellerne (2)-(4) er frembringelse af ny viden via virksomhedernes forskning og udvikling under monopolistisk konkurrence. Mens humankapital er et rivaliserende gode, er viden et ikke-rivaliserende gode. Modsat U-L modellen indebærer Romer-modellerne (2)-(4) derfor en positiv skalaeffekt (på produktivitetsniveau såvel som produktivitetsvækstrate).

2. I U-L modellen (uden eksterne effekter af uddannelse) er der fuldkommen konkurrence, og markedsløsningen er lig det sociale optimum. I alle Romer-modellerne derimod underinvesteres der (enten i realkapital eller i forskning). I Romer (1) er der behov for et investeringstilskud, og i Romer (2)-(4) er der behov for et monopolpris-kompenserende subsidium til køberne af specialiserede inputs og i Romer-model (3) og (4) også behov for et subsidium til forskning pga. den positive eksterne effekt. I Lucas' egen version af U-L modellen (kun strejfet i B&S, men behandlet i Lucas) er der imidlertid også behov for statsintervention, idet der i denne version er en positiv ekstern effekt af at uddanne sig: den enkeltes grænseproduktivitet i sektor 1 afhænger positivt af den gennemsnitlige humankapital i samfundet. Dette tilsiger et subsidium til uddannelse.

3. Romer-modellerne (1)-(3) har AK-lignende modelstrukturer, dvs. teknologi og virksomhedsadfærd fører til en aggregeret produktionsfunktion, hvor forholdet mellem output og "aggregeret kapital" (her forstået tilpas bredt) er konstant. Der bliver da ingen "transitional dynamics". I U-L modellen og Romer-model (4) optræder der derimod to essentielt forskellige "kapitalgoder" (de kan ikke aggregeres), og der bliver derfor tale om en kun gradvis tilpasning til steady state.