

## Makroøkonomi, 2. årsprøve, 1. semester

Lynprøve, november 2001, uge 45

Alle hjælpemidler tilladt

### Semi-endogen vækst i Solow-modellen

I AK-modeller for endogen vækst kan den aggregerede produktionsfunktion "AK-karakter" rationaliseres således, at den enkelte virksomhed har en normal Cobb-Douglas produktionsfunktion, men grundet gunstige eksterne effekter ved kapitalanvendelse, bliver aggregeret output proportionalt med aggregeret kapitalanvendelse.

For at få fuld proportionalitet mellem kapital og output skal der antages meget kraftige eksterne effekter. Meningen med denne opgave er at undersøge, om man kan få endogen vækst, hvis man fortsat antager, at der udgår positive eksterne effekter fra kapitalanvendelse, men effekter af en mere plausibel størrelsesorden.

Der betragtes en (Solow-) vækstmodel i sædvanlig notation bortset fra anførte ændringer/præciseringer.

På virksomhedsniveau, dvs. hos den repræsentative virksomhed, er produktionsfunktionen (som sædvanlig uden eksplicit datering af variablene):

$$Y = K^\alpha (aL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

hvor  $a$  er en produktivitetsfaktor. Der er ikke nogen eksogen vækst i  $a$ , men pga. "learning by doing" kan  $a$  afhænge positivt af de akkumulerede investeringer, eller af den aggregerede kapitalanvendelse  $\bar{K}$ :

$$a = \bar{K}^\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 1. \quad (*)$$

Den enkelte virksomhed tager  $\bar{K}$ , og dermed  $a$ , for given. På makroplan gælder (fordi der netop er én repræsentativ virksomhed):

$$\bar{K} = K.$$

Kapitalakkumulations-ligningen er:

$$\dot{K} = sY - dK, \quad 0 < s < 1, \quad d > 0.$$

Der antages en konstant vækstrate i arbejdsstyrken:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \quad n \geq 0.$$

Ovenstående fem sammenhænge udgør den model, der skal analyseres.

**Spørgsmål 1.** Opstil den aggregerede produktionsfunktion og redegør for, at når  $\varphi > 0$  har denne stigende skalaafkast, og for at der ikke bliver fuld proportionalitet mellem aggregeret output og aggregeret kapitalanvendelse (da  $\varphi < 1$ ).

**Spørgsmål 2.** Hvis  $\varphi > 0$ , og arbejdsinput  $L$  vokser, og kapitalintensiteten  $k \equiv K/L$  er uændret, hvordan må det så være gået med BNP pr. mand  $y \equiv Y/L$ ?

Det er hensigtsmæssigt at analysere modellen i variablene:

$$\tilde{k} \equiv \frac{K}{aL} \quad \text{og} \quad \tilde{y} \equiv \frac{Y}{aL}.$$

**Spørgsmål 3.** Vis at der fra modellen ovenfor må gælde:

$$\tilde{y} = \tilde{k}^\alpha \quad \text{og} \quad \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \varphi \frac{\dot{K}}{K}.$$

**Spørgsmål 4.** Vis at bevægelsesloven (differentialligningen) for  $\tilde{k}$ , der følger af modellen ovenfor, er:

$$\frac{d\tilde{k}}{dt} = (1 - \varphi)s\tilde{k}^\alpha - [n + (1 - \varphi)d]\tilde{k}.$$

(Her betyder  $d\tilde{k}/dt$  den tidsafledede af  $\tilde{k}$  mht. tiden  $t$ . Når der ikke er brugt prik-notation, er det kun fordi tekstbehandlingssystemet ikke kan sætte prikker over tilder).

**Spørgsmål 5.** Redegør for, at over tid konvergerer  $\tilde{k}$  og  $\tilde{y}$  mod bestemte steady state-niveauer  $\tilde{k}^*$  og  $\tilde{y}^*$  og angiv værdierne for disse.

**Spørgsmål 6.** Vis at i steady state, hvor  $\tilde{k}$  og  $\tilde{y}$  ligger fast på hhv.  $\tilde{k}^*$  og  $\tilde{y}^*$ , er vækstraten i  $K$ :

$$\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^* = \frac{n}{1 - \varphi}.$$

Vink: Brug  $\tilde{k} \equiv K/(aL)$  og at i steady state er  $d\tilde{k}/dt = 0$ .

I en model uden eksogene tekniske fremskridt siger vi, at der er en slags endogen vækst, hvis der i steady state er en strengt positiv vækstrate i  $y$ .

**Spørgsmål 7.** Vis at i steady state er vækstraten i  $y$ :

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^* = \frac{\varphi n}{1 - \varphi}.$$

Under hvilke omstændigheder (under hvilke parameter-værdier) forekommer der endogen vækst? Kommentér og forklar så godt du kan. Hvorfor tror du den form for endogen vækst, man kan have i denne model, kaldes semi-endogen?

**Spørgsmål 8.** I (\*) ovenfor blev det antaget, at den eksterne "learning by doing"-effekt udgik fra den totale kapitalanvendelse  $\bar{K}$ . Alternativt kunne man antage, at effekten udgik fra kapitalanvendelsen *pr. mand* i overensstemmelse med:

$$a = \left( \frac{\bar{K}}{L} \right)^\varphi . \quad (**)$$

Overvej hvilken af mulighederne (\*) eller (\*\*) du finder mest rimelig som udtryk for den idé, at installation af ny kapital (ud over en direkte produktiv effekt) har en positiv "spill over"-effekt på arbejdskraftens generelle produktivitet.

**Spørgsmål 9.** Antag (\*\*) i stedet for (\*) og lad resten af modellen være uændret. Hvordan ligger det nu med mulighederne for at få (semi-) endogen vækst? Forklar resultatet ud fra den aggregerede produktionsfunktions udseende. Har den eksterne effekt nu nogen betydning overhovedet for modellens steady state? Vink: Ikke kun vækstraten i  $y$ , men også dens niveau, er af interesse.