UGESEDDEL 2

MAKROØKONOMI 1, EFTERÅR 2003
MATEMATIK-ØKONOMI

Henrik Jensen
Københavns Universitets
Økonomiske Institut
Hjemmeside: www.econ.ku.dk/personal/henrikj/makro1-E2003/

I uge 37 (9/9 og 12/9) har vi gennemgået:

- I.a. Fakta om vækst, den basale og udvidede Solow model, samt empiriske anvendelser (fortsat):

  Solow modellen uden tekniske fremskridt (fortsat): produktionsfaktorer: kapital og arbejdskraft (=hele befolkningen); produktionsfunktion med konstant skalaafkast; Cobb-Douglas funktionen; faktorpriser og indkomster under profitmaksimering; konstant løn- og kapitalindkomstandel; opsparing pr. definition lig investeringer; definitionsligningen for ændringen i kapitalapparatet pr. tidsenhed; opsparing som en konstant andel af indkomst; udviklingen i kapital pr. capita, $\dot{k}$, givet ved bruttoinvesteringer pr. mand/kvinde minus fysisk nedslidning og reduktionen som følger af befolkningsvækst; grafisk løsning af modellen; modellens steady state, k^*; for $k < \dot{k}$ haves $\dot{k} > 0$ hvilket medfører "capital deepening"; ved $\dot{k} = 0$ haves "capital widening"; højere opsparingstilbøjelighed og kort- og langsigtseffekterne på k (og dermed BNP pr. capita); højere opsparingstilbøjelighed medfører højere BNP pr. capita; i steady state: *ingen* vækst i BNP pr. capita; BNP vokser som befolkningsstørrelsen; "kun" positiv pr. capita vækst ved tilpasning til steady state (startende fra et indkomstniveau lavere end steady state).

  Solow modellen med tekniske fremskridt: Produktionsfunktion udvides med variabel for teknologiniveau, A; højere teknologiniveau gør arbejdskraften mere produktiv; "Harrod-neutrale" tekniske fremskridt; eksogen vækstrate i teknologi, g; langs "balanceret vækststi" vokser y (output pr. capita) og k (kapital pr. capita) med g; løsning af model som i tilfældet uden tekniske fremskridt gennem definition af ny tilstandsvariabel $\widetilde{k} \equiv K/(AL)$; steady state formuleret ved konstant $\widetilde{k}$ og dermed konstant $\widetilde{y}$;

Det relevante pensum er **Jones**, 2.1-2.2.

NOTE 1: Harrod-, Hicks- og Solow-neutrale tekniske fremskridt: Definitioner og ækvivalens når produktionsfunktionen er Cobb-Douglas

I **Jones**, Kap 2 bruges begreberne Harrod-, Hicks- og Solow-neutrale tekniske fremskridt sådan lidt løst. Denne note definerer begreberne lidt mere præcist for en generel produktionsfunktion, og viser at alle tre begreber er ækvivalente, når produktionsfunktionen er af Cobb-Douglas formen, som vi jo bruger hele tiden (så *derfor* vi kan sove roligt om natten). Men en lille opklaring er nu på sin plads.

Harrod-neutrale tekniske fremskridt. I dette tilfælde har produktionen følgende form:

$$Y = F(K, AL), \tag{1}$$

hvor Y er output, K er kapitalapparatet, L er arbejdskraft, og A er teknologiniveauet, som ofte benævnes som "labor augmenting," idet det har en direkte effekt på produktiviteten af arbejdskraften, L. Funktionen F er konkav i begge argumenter og udviser konstant skalaafkast, dvs. $\lambda Y = F(\lambda K, \lambda AL)$, for alle $\lambda \geq 0$ (m.a.o., er F homogen af 1. grad).

Grunden til at de tekniske fremskridt benævnes som "neutrale" er, at Harrod definerede neutralitet som ækvivalent med en situation, hvor et teknisk fremskridt betød, at det relative faktorafkast forblev konstant for et givet K/Y forhold. Dvs. $rK/(wL)$ ændres ikke ved tekniske fremskridt for et givet K/Y. Dette ses opfyldt af (1), da et konstant Y/K (og dermed K/Y) indebærer konstant AL/K, fordi antagelsen om konstant skalaafkast indebærer, at $Y/K = F(1, AL/K)$. Det relative faktorafkast er $F_K(K, AL) K/(AF_L(K, AL) L)$.[1] Da AL/K er konstant er det relative faktorafkast konstant, hvis $F_K(K, AL)/F_L(K, AL)$ er konstant. Benyt nu at når F er homogen af 1. grad, da er F_K og F_L homogene af 0. grad. Vi kan derfor skrive sidstnævnte forhold som $F_K(1, AL/K)/F_L(1, AL/K)$, som jo er konstant, da AL/K er konstant. Ved Harrod-neutrale tekniske fremskridt er det relative faktorafkast dermed konstant for et givet K/Y.

Hicks-neutrale tekniske fremskridt. I dette tilfælde har produktionsfunktionen formen

$$Y = BF(K, L), \tag{2}$$

hvor nu B er et udtryk for teknologiniveauet. Det ses, at teknologien nu ikke har en direkte effekt udelukkende på den ene faktors produktivitet, men øger begge faktorers produktivitet. Derfor anvender **Jones** også denne formulering i kapitel 2.4 om vækstregnskaber, da B således kan fortolkes som *total* faktor produktivitet.

At tekniske fremskridt her er "neutrale," skyldes, at Hicks definerede et fremskridt som neutralt, hvis forholdet mellem marginalprodukterne forblev konstant for et givet

[1] F_i angiver $\partial F/\partial i$.

K/L forhold. Dette ses let at være opfyldt af (2), da forholdet mellem marginalprodukterne er $BF_K(K,L)/[BF_L(K,L)] = F_K(K/L,1)/F_L(K/L,1)$ (fordi F_K og F_L er homogene af 0. grad). Dette er konstant, når K/L konstant.

Solow-neutrale tekniske fremskridt. I dette tilfælde har produktionsfunktionen formen

$$Y = F(CK, L), \tag{3}$$

hvor nu C er et udtryk for teknologiniveauet. Som det fremgår på virker dette nu direkte kapitalapparatets produktivitet, og derfor taler man i tilfældet med (3), om at teknologien er "capital-augmenting."

Betegnelsen "neutrale" i dette tilfælde stammer fra, at Solow definerede et teknisk fremskridt som neutralt, hvis det relative faktorafkast forblev konstant for et givet Y/L forhold. Et konstant Y/L implicerer et konstant CK/L, da (3) kan omskrives til $Y/L = F(CK/L,1)$. Det relative faktorafkast, $rK/(wL)$ er her givet ved $CF_K(CK,L)K/[F_L(CK,L)L]$. Dette er konstant, hvis $F_K(CK,L)/F_L(CK,L)$ er konstant. Da dette forhold kan skrives som (igen fordi F_K og F_L er homogene af 0. grad) $F_K(CK/L,1)/F_L(CK/L,1)$, haves at det relative faktorafkast er konstant for et konstant Y/L.

Ækvivalens når produktionsfunktionen er Cobb-Douglas. I Cobb-Douglas tilfældet, hvor $F(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, ses det umiddelbart, at for (1), da er $x_1 = K$ og $x_2 = AL$. For (2), da er $x_1 = BK$ og $x_2 = BL$. For (3), da er $x_1 = CK$ og $x_1 = L$. Funktionerne er derfor ens, hvis vi definerer følgende relation mellem "teknologibegreberne":

$$A^{1-\alpha} = B = C^{\alpha} \tag{4}$$

Det er derfor ligegyldigt, hvilken form for tekniske fremskridt man antager, når man opererer med denne fuktionsform.

For generelle produktionsfunktioner, er det derimod *ikke* ligegyldigt, da det rent faktisk kun er under Harrod-neutrale tekniske fremskridt, at man kan opstille en model med balanceret vækst; dvs. en model, hvor i steady state såvel Y per capita, $y \equiv Y/L$, som kapital per capita, $k \equiv K/L$ vokser med samme konstante rate. For at se dette, anvend antagelsen om konstant skalaafkast på funktionen (1):

$$\begin{aligned} Y &= F(K, AL), \\ &\Longrightarrow Y/(AL) = F(K/(AL), 1), \\ &\Longrightarrow \widetilde{y} = F\left(\widetilde{k}, 1\right), \end{aligned} \tag{5}$$

hvor, som i **Jones**, $\widetilde{y} \equiv Y/(AL)$ og $\widetilde{k} \equiv K/(AL)$. Det ses af sidste udtryk, at hvis A vokser med raten g, da er det fuldt foreneligt med at y og k også vokser med denne rate, da $\widetilde{y}$ og $\widetilde{k}$ dermed er konstante. M.a.o. vil man for en generel produktionsfunktion med konstant skalaafkast have balanceret vækst, hvis teknologiske fremskridt er Harrod-neutrale.

Det går derimod "galt" hvis vi antager Hicks-neutrale tekniske fremskridt: anvendes antagelsen om konstant skalaafkast på (2), da fås

$$\begin{aligned} Y &= BF(K,L), \\ &\Longrightarrow Y/L = BF(K/L,1), \\ &\Longrightarrow y = BF(k,1), \end{aligned}$$

og vi ser, at der er intet som tilsiger, at y og k skulle vokse med samme rate. Differentier m.h.t. tiden, og brug udtrykket igen, og man få r:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{F_K(k,1)\,k}{F(k,1)}\frac{\dot{k}}{k}.$$

Dvs. y og k vokser kun med samme konstante rate, eksempelvis kaldet g_{HICKS}, *hvis*

$$\frac{\dot{B}}{B} = \left[1 - \frac{F_K(k,1)\,k}{F(k,1)}\right] g_{HICKS}$$

gælder. Dét er der jo ingen grund til at tro holder nødvendigvis, da $F_K(k,1)\,k/F(k,1)$ jo vil ændre sig med tiden, efterhånden som k ændrer sig. *Men*, i Cobb-Douglas tilfældet, får man

$$\begin{aligned} \frac{\dot{B}}{B} &= \left[1 - \frac{\alpha k^{\alpha-1}k}{k^{\alpha}}\right] g_{HICKS} \\ &= (1-\alpha)\, g_{HICKS}. \end{aligned}$$

M.a.o., da det kan udledes fra (4), at under Cobb-Douglas vil vækstraten i B være $(1-\alpha)$ gange vækstraten i A,[2] da "passer pengene," og vi har også balanceret vækst i y og k under Hicks-neutrale tekniske fremskridt.

Hvis vi for en generel produktionsfunktion antager Solow-neutrale tekniske fremskridt, går det også galt. For at se dette, anvend antagelsen om konstant skalaafkast på funktionen (3):

$$\begin{aligned} Y &= F(CK,L) \\ &\Longrightarrow Y/L = F(CK/L,1) \\ &\Longrightarrow y = F(Ck,1) \end{aligned}$$

Vi ser igen, at der er intet som tilsiger, at y og k skulle vokse med samme rate. Differentier m.h.t. tiden, og brug udtrykket igen, og man får:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{y} &= \frac{F_K(Ck,1)\,k\dot{C}}{F(Ck,1)} + \frac{F_K(Ck,1)\,C\dot{k}}{F(Ck,1)} \\ &= \frac{F_K(Ck,1)\,kC}{F(Ck,1)}\frac{\dot{C}}{C} + \frac{F_K(Ck,1)\,Ck}{F(Ck,1)}\frac{\dot{k}}{k}. \end{aligned}$$

[2] Brug det velkendte trick med at tage logaritmer, og differentiere m.h.t. tiden.

Dvs. y og k vokser kun med samme konstante rate, eksempelvis kaldet g_{SOLOW},[3] *hvis*

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{F\left(Ck,1\right)-F_{K}\left(Ck,1\right)Ck}{F_{K}\left(Ck,1\right)kC}g_{SOLOW}.$$

Igen, det er der ingen grund til at tro, da såvel C som k ændres over tid. *Men*, i Cobb-Douglas tilfældet, får man

$$\begin{aligned}\frac{\dot{C}}{C} &= \frac{\left(Ck\right)^{\alpha}-\alpha\left(Ck\right)^{\alpha-1}Ck}{\alpha\left(Ck\right)^{\alpha-1}kC}g_{SOLOW},\\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha}g_{SOLOW}\end{aligned}$$

M.a.o., da vi kan udlede fra (4), at under Cobb-Douglas vil vækstraten i C være $\left(1-\alpha\right)/\alpha$ gange vækstraten i A, da "passer pengene" igen, og vi har også balanceret vækst i y og k under Solow-neutrale tekniske fremskridt.

Dvs. hvis man vil bevæge sig udover Cobb-Douglas specifikationen, da er det kun Harrod-neutrale tekniske fremskridt, som er konsistente med balanceret vækst.

[3]Undskyld, hvis det er forvirrende at kalde en vækstrate for en "Solow-vækstrate." Vi ser her udelukkende på definitioner for, og implikationer af, forskellige specifikationer af produktionsfunktionen, og én af dem navngives altså ved, at den forårsager Solow-neutrale tekniske fremskridt. Det har i sig selv ikke noget med Solow modellen at gøre som sådan.