Eksamen på Økonomistudiet sommer 2016

Lineære Modeller - Sommerskolevariant

valgfag

Mandag d.15 august 2016.

(3-timers prøve med hjælpemidler, dog ikke lommeregner eller cas-værktøjer)

Dette eksamenssæt består af 2 sider.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

LM August 2016

Eksamen i Lineære Modeller - Sommerskolevariant

Mandag d.15 august 2016.

Dette er en 3-timers eksamen (2 sider med i alt 4 opgaver).

Brug af bøger, noter og lignende er tilladt, men brug af lommeregner og cas-værktøjer er ikke tilladt.

Opgave 1.
I $\mathbf{R}^n$ er der givet fem lineært uafhængige vektorer u_1, u_2, u_3, u_4 og u_5. Lad v og w være givet ved $v = u_1 + u_2$ og $w = u_1 + u_2 - u_3$. Vi kalder $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = U$.

Endvidere er en lineær afbildning $T : U \to \mathbf{R}$ givet ved

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5,$$

med hensyntil basen u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 i U.

(1) Vis at u_1, v, w, u_4, u_5 er en basis for U.

(2) Bestem en basis for nulrummet for T. Er T injektiv?

(3) Bestem løsningsmængden til ligningen $Tx = y$, hvor $y \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem koordinaterne for vektoren $u_3 - u_4$ med hensyn til basen u_1, v, w, u_4, u_5 i U .

Opgave 2. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

(1) Vis at $v = (0, 0, 1)$ er en egenvektor for A og bestem den tilhørende egenværdi.

(2) Bestem alle egenværdierne for A og deres multipliciteter.

(3) Bestem matricen A^4.

(4) Gør rede for, at $(A^2 - A)(A^2 + A) = A^2$.

(5) Bestem determinanten for matricen A^{2k}, hvor k er et naturligt tal.

(6) Bestem vektoren $A^{-1}v$.

(7) Bestem vektoren $A^{2k+1}v$, hvor k er et naturligt tal.

Opgave 3.

(1) Beregn integralet $\int \sin^2((a+b)x)\cos(bx)dx$, hvor a og b er positive, reelle tal, om hvilke der gælder at ingen af tallene $2a+3b$ eller $2a+b$ er 0.

(2) Løs ligningen $\frac{z}{2} + \frac{i}{z} = 1 + i$. Løsningen ønskes angivet på rektangulær form $a + ib$.

Opgave 4.

Vi betragter funktionen f, som er sumfunktion for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a^2x^2 - 2ax + 1)^n,$$

hvor a er et positivt, reelt tal.

(1) Bestem de værdier af x, for hvilke funktionen f er veldefineret.

(2) Bestem en regneforskrift for funktionen f.

(3) Bestem monotoniforholdene for funktionen f.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f, og undersøg om funktionen er injektiv.

(5) Løs ligningen $f(x) = y$ (med hensyn til x) for et givet y beliggende i værdimængden for funktionen f.