KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

LM August 2019

Eksamen i Lineære Modeller - Sommerskole.

Tirsdag d.13 august 2019.

Dette er en 3-timers eksamen (2 sider med i alt 4 opgaver).

Brug af bøger, noter og lignende er tilladt, men brug af lommeregner og cas-værktøjer er ikke tilladt.

Opgave 1.

I $\mathbf{R}^{2019}$ er der givet fire lineært uafhængige vektorer u_1, u_2, u_3 og u_4. Lad v_1 og v_2 være givet ved $v_1 = u_1 - u_2$ og $v_2 = u_1 - u_3 + u_4$. Vi kalder $\text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = U$ og $\text{span}\{v_1, v_2\} = V$.

Vi betragter endvidere den lineære afbildning $L : U \to V$, som med hensyn til baserne u_1, u_2, u_3, u_4 i U og v_1, v_2 i V har afbildningsmatricen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(1) Gør rede for at V er et underrum af U med dimension 2.

(2) Bestem koordinaterne til vektoren $L(u_1 + u_2)$ med hensyn til basen v_1, v_2 for V.

(3) Bestem koordinaterne til vektoren $L(u_1 + u_2)$ med hensyn til basen u_1, u_2, u_3, u_4 for U.

(4) Bestem en basis for nulrummet for L. Er L injektiv? Hvad siger dimensionsætningen om denne situation?

(5) Vis at vektoren $-2u_1 + u_2 + 2u_3 - u_4$ tilhører nulrummet for L og bestem denne vektors koordinater med hensyn til den ovenfor fundne basis for nulrummet.

(6) Bestem løsningsmængden til ligningen $Lx = v_1 + v_2$.

Opgave 2.

Vi betragter en symmetrisk, $3 \times 3-$matrix A, givet ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix} .$$

Her er a og b reelle tal, forskellige fra 0. Det oplyses at A har egenvektorerne $v_1 = (1, 0, 0)$ og $v_2 = (0, 1, 2)$.

(1) Bestem en tredje egenvektor v_3, således at v_1, v_2, v_3 er en basis for $\mathbf{R}^3$.

(2) Gør rede for, at $5a = 2b$.

(3) Gør rede for, at A har egenværdierne a, $3a$, og $\frac{a}{2}$.

(4) Gør rede for, at matricen A er invertibel.

(5) Bestem vektoren $e^A(v_1 + v_2)$.

Opgave 3.

(1) Beregn integralet $\int \sin^2(2x)\sin(3x)dx$.

(2) Løs ligningen $z^2 = \sqrt{3} - i$. Løsningerne ønskes angivet på rektangulær form $a + ib$.

Opgave 4.

Vi betragter funktionen f, som er sumfunktion for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-|x| + 1)^n.$$

(1) Bestem de værdier af x, for hvilke funktionen f er veldefineret.

(2) Bestem en regneforskrift for funktionen f.

(3) Bestem monotoniforholdene for funktionen f.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f, og undersøg om funktionen er injektiv.

(5) Løs ligningen $f(x) = y$ (med hensyn til x) for et givet y beliggende i værdimængden for funktionen f.