Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2013

DYNAMISKE MODELLER

Valgfag på 2. årsprøve

Mandag den 17. juni 2013

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Opgavesættet består foruden af denne forside af 3 sider med opgaver.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2013 S-2DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 17. juni 2013

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_1(z) = z^4 + 8z^3 + 27z^2 + 70z + 50$$

og tredjegradspolynomiet $P_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_2(z) = z^3 + 4z^2 + 14z + 20.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 8\frac{d^3x}{dt^3} + 27\frac{d^2x}{dt^2} + 70\frac{dx}{dt} + 50x = 0,$$

$$(**) \qquad \frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} + 20y = 0,$$

og

$$(***) \qquad \frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} + 20y = 39e^t.$$

(1) Vis, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_1(z) = (z^2 + 6z + 5)(z^2 + 2z + 10),$$

og bestem dernæst alle rødderne i polynomiet P_1.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og godtgør, at $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

(3) Vis, at $\sigma = -2$ er rod i polynomiet P_2, og find de øvrige rødder i P_2.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

(5) Bestem mængden af de funktioner, der er løsninger til begge differentialligningerne $(*)$ og $(**)$.

(6) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Opgave 2. For ethvert $n \in \mathbf{N}$ betragter vi mængden

$$A_n = \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 - \frac{1}{2n} \ \vee \ |z| > 2n \Big\}.$$

(1) Vis, at mængden A_n er åben for ethvert $n \in \mathbf{N}$.

(2) Bestem randen for mængden A_n.

(3) Bestem mængden

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n.$$

(4) Bestem mængden

$$A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n.$$

(5) Lad (z_k) være en følge af punkter fra mængden A.

Vis, at følgen (z_k) har en konvergent delfølge (z_{n_p}), og at grænsepunktet z_0 for denne delfølge opfylder betingelsen

$$|z_0| \leq \frac{1}{2}.$$

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x_1, x_2) = \Big(x_1 + x_2, \ln(1 + x_1^2 + x_2^2) \Big).$$

(1) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x_1, x_2)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem de punkter (x_1, x_2), hvor Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x_1, x_2)$ er regulær.

(3) Bestem mængden af fikspunkter for vektorfunktionen $\mathbf{f}$.

(4) Betragt vektoren $v_0 = (1, -1)$.
Løs ligningen
$$y - \mathbf{f}(v_0) = D\mathbf{f}(v_0)\Big(x - v_0\Big)$$
med hensyn til x.

Opgave 4. Vi betragter funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften
$$\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2x^4,$$
og korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket
$$F(x) = \begin{cases} [1, 2], & \text{for } x < 0 \\ [-1, 1], & \text{for } x = 0 \\ [-2, 2], & \text{for } x > 0 \end{cases}.$$

(1) Vis, at korrespondancen F ikke har afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften
$$\forall\, x \in \mathbf{R} : V(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}.$$

(4) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket
$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M(x) = \{y \in F(x) \mid V(x) = f(x, y)\}.$$