Eksamen på Økonomistudiet. Sommeren 2013

DYNAMISKE MODELLER

Valgfag på 2. årsprøve

Mandag den 12. august 2013

(3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. Dog må der ikke medbringes lommeregnere eller anvendes nogen form for elektroniske hjælpemidler)

Opgavesættet består foruden af denne forside af 3 sider med opgaver.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2013 S-2DM rx

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 12. august 2013

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^3 + (3-a)z^2 + (2-3a)z - 2a$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (3-a)\frac{d^2x}{dt^2} + (2-3a)\frac{dx}{dt} - 2ax = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 24e^{2t}.$$

(1) Vis, at $z = a$ er en rod i polynomiet P_a, og bestem dernæst alle rødderne i polynomiet P_a.

(2) Bestem for ethvert $a \in \mathbf{R}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(3) Bestem de $a \in \mathbf{R}$, for hvilke differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Opgave 2. For ethvert $n \in \mathbf{N_0}$ betragter vi mængden

$$A_n = \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z < -n \vee \operatorname{Re} z > n \Big\}.$$

Husk, at $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ er mængden af alle udvidede naturlige tal.

(1) Vis, at mængden A_n er åben, men ikke konveks for ethvert $n \in \mathbf{N}_0$.

(2) Bestem randen for mængden A_n.

(3) Bestem mængden

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}_0} A_n.$$

(4) Bestem mængden

$$A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} A_n.$$

(5) Bestem randen af mængden A_∞.

(6) Vi betragter mængden

$$K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 7\}$$

og funktionen $f : K \to \mathbf{C}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, z \in K : f(z) = z^3 + 7z^2 + 2z + 1.$$

Vis, at billedmængden $f(K)$ er kompakt.

(7) Det ydre for mængden K betegner vi med Y, og vi betragter funktionen $g : Y \to \mathbf{C}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, z \in Y : g(z) = \frac{i}{z}.$$

Bestem mængden Y og billedmængden $g(Y)$. Godtgør desuden, at billedmængden $g(Y)$ er åben, men ikke konveks.

(8) Bestem afslutningen $\overline{g(Y)}$ af billedmængden $g(Y)$, og godtgør, at $\overline{g(Y)}$ er kompakt og konveks.

Opgave 3. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Vis, at matricen A har egenværdierne $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{5}$ og $\lambda_3 = \frac{3}{10}$ med de tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (-5,3,-5) \text{ og } \mathbf{v}_3 = (6,-1,-1).$$

(2) Opskriv den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§).

For ethvert $v \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$B(v) = \begin{pmatrix} 2v & 1 & 1 \\ 1 & 4v & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S\S) \qquad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = B(v)\mathbf{w}.$$

(3) Undersøg, om differentialligningssystemet (§§) er globalt asymptotisk stabilt for nogen værdi af parameteren $v \in \mathbf{R}$.

Opgave 4. For ethvert $a > 0$ betragter vi funktionen $F_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (t,x,y) \in \mathbf{R}^3 : F_a(t,x,y) = x^2 + e^{at}y,$$

og integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(x^2 + e^{at}\dot{x}\right) dt.$$

(1) Vis, at for ethvert $a > 0$ og ethvert $t \in \mathbf{R}$ er funktionen $F_a = F_a(t,x,y)$ konveks som funktion af $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, som minimerer integralet $I(x)$, når betingelsen $x^*(0) = 1$ er opfyldt.