Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller
Sommeren 2015

VALGFAG

Onsdag den 17. juni 2015

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog må man ikke medbringe eller anvende lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2015 S-2DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Onsdag den 17. juni 2015

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^3 - (6+a)z^2 + (5+6a)z - 5a.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - (6+a)\frac{d^2x}{dt^2} + (5+6a)\frac{dx}{dt} - 5ax = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - 9\frac{d^2x}{dt^2} + 23\frac{dx}{dt} - 15x = e^{2t}.$$

(1) Vis, at $z = a$ er en rod i polynomiet P_a. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P_a, og angiv røddernes multipliciteter.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

(4) En homogen, lineær differentialligning $(***)$ har det tilhørende karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ med forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = (z^2+1)P_7.$$

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Opgave 2. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [-2,2], & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ [-3,3], & \text{for } x \geq 1 \end{cases},$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 x.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

(4) Bestem mængden af alle fikspunkter for korrespondancen F. [Et fikspunkt for F er et punkt, så $x \in F(x)$.]

(5) Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, idet udsagnet

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : V(x) = \max\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$$

er opfyldt.

(6) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M(x) = \{y \in F(x) \mid V(x) = f(x,y)\}.$$

Opgave 3. For ethvert $r \geq 1$ betragter vi mængden

$$K(r) = \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid \frac{5}{r} \leq |z| \leq 5 + \frac{1}{r} \Big\}.$$

(1) Godtgør, at mængden $K(r)$ er kompakt for et vilkårligt $r \geq 1$.

(2) Bestem fællesmængden

$$K_0 = \bigcap_{r \geq 1} K(r).$$

Er K_0 kompakt?

(3) Bestem foreningsmængden

$$K_\infty = \bigcup_{r \geq 1} K(r).$$

Er K_∞ kompakt?

(4) Bestem det ydre for mængden K_∞.

(5) Lad (z_k) være en følge, som opfylder betingelsen

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : z_k \in K(k).$$

Vis, at følgen (z_k) har en konvergent delfølge (z_{k_p}) med et grænsepunkt z_0. Hvad er $|z_0|$?

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(4x + \dot{x} + \dot{x}^2\right) dt = \int_0^1 \left[4x + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = 4x + y + y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = 2015$ er opfyldt.