Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller
Vinteren 2014 - 2015

VALGFAG

Lørdag den 24. januar 2015

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog må man ikke medbringe eller anvende lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2015 V-2DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Lørdag den 24. januar 2015

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 20z + 25.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 14\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 14\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 25x = 25t^2 + 65t + 98.$$

(1) Vis, at udsagnet

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = \left(z^2 + 2z + 5\right)^2$$

er opfyldt.

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet P, og angiv røddernes multipliciteter.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(4) Godtgør, at differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

(6) En homogen lineær differentialligning $(***)$ har det tilhørende karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ med forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = \left(z^2 + 2z + 5\right)^3.$$

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Opgave 2. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [-3,3], & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ [0,2], & \text{for } x > 1 \end{cases},$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

(4) Bestem mængden af alle fikspunkter for korrespondancen F. [Et fikspunkt for F er et punkt, så $x \in F(x)$.]

(5) Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, idet udsagnet

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : V(x) = \max\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$$

er opfyldt.

(6) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M(x) = \{y \in F(x) \mid V(x) = f(x,y)\}.$$

Opgave 3. Vektorrummet $\mathbf{R}^n$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet). Lad (x_k) og (z_k) være to konvergente følger på $\mathbf{R}^n$ med grænsepunkterne x henholdsvis z.

(1) Lad $a \in \mathbf{R}^n$ være en fast valgt vektor. Vis, at talfølgen $(y_k) = (a \cdot x_k)$ er konvergent med grænseværdien $y = a \cdot x$.

(2) Vis, at talfølgen $(v_k) = (x_k \cdot z_k)$ er konvergent med grænseværdien $v = x \cdot z$.

(3) Lad (w_k) være en følge på $\mathbf{R}^n$, som opfylder betingelsen

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : \|w_k\| > 1.$$

Vis, at følgen (u_k), som er defineret ved forskriften

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|},$$

har en konvergent delfølge (u_{k_p}).

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(2x + e^t \dot{x}^2\right) dt = \int_0^1 \left(2x + e^t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = 2x + e^t y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = 3e^{-1}$ er opfyldt.