Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller
Vinteren 2015 - 2016

VALGFAG

Torsdag den 7. januar 2016

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Alle sædvanlige hjælpemidler må medbringes og anvendes, dog må man ikke medbringe eller anvende lommeregnere eller andre elektroniske hjælpemidler

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2016 V-2DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Torsdag den 7. januar 2016

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.
Løsningstid: 3 timer
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^3x}{dt^3} + 13\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 4x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^3x}{dt^3} + 13\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 4x = 72e^t + 20.$$

(1) Vis, at tallene $z = -1$ og $z = -2$ er rødder i polynomiet P. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og begrund, at $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

En homogen, lineær differentialligning af femte orden har det karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = (z + 1)P(z).$$

(4) Opskriv denne differentialligning og bestem dens fuldstændige løsning.

Opgave 2. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [0,2], & \text{for } 0 \leq x < 3 \\ [0,3], & \text{for } x \geq 3 \end{cases} .$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + xy.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

(4) Bestem mængden af alle fikspunkter for korrespondancen F. [Et fikspunkt for F er et punkt, så $x \in F(x)$.]

(5) Bestem en forskrift for den maksimale værdifunktion $v_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, idet udsagnet

$$\forall x \in \mathbf{R} : v_u(x) = \max\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$$

er opfyldt.

(6) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall x \in \mathbf{R} : M_u(x) = \{y \in F(x) \mid v_u(x) = f(x,y)\}.$$

Betragt korrespondancen $G : [0,4[\to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$G(x) = \begin{cases} [0,2], & \text{for } 0 \leq x < 3 \\ [0,3], & \text{for } 3 \leq x < 4 \end{cases} .$$

(7) Har korrespondancen G afsluttet graf egenskaben?

Opgave 3. Vi betragter den symmetriske 3×3 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningerne

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{og} \quad (ii) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

hvor $x \in \mathbf{R}^3$.

(1) Vis, at vektorerne $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,0)$ og $v_3 = (-1,0,1)$ er egenvektorer for matricen A, og bestem de tilhørende egenværdier.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (i).

(3) Opskriv den tilhørende fundamentalmatrix $\Phi(t)$, og bestem resolventen $R(t,0)$.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (ii).

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(4x^2 + 2\dot{x}^2\right)e^t\,dt = \int_0^1 \left[4x^2 + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]e^t\,dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : F(x,y) = (4x^2 + 2y^2)e^t.$$

(1) Vis, at funktionen F er konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = 7(e - e^{-2})$ er opfyldt.