Skriftlig eksamen på Økonomistudiet

Vinteren 2016 - 2017

DYNAMISKE MODELLER

Mandag den 16. januar 2017

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du kontakte eksamenstilsynet og blive registeret som syg af vedkommende eksamensvagt. Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen. Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende en lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2017 V-2DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 16. januar 2017

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert talpar $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_{(a,b)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_{(a,b)}(z) = z^3 + (a + b + 1)z^2 + (a + ab + b)z + ab.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (a + b + 1)\frac{d^2x}{dt^2} + (a + ab + b)\frac{dx}{dt} + abx = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 36e^t.$$

(1) Vis, at tallet $z = -a$ er rod i polynomiet $P_{(a,b)}$. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet $P_{(a,b)}$, og angiv deres multipliciteter.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(3) For hvilke talpar $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil?

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

For ethvert $c \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + 2cx = 0.$$

(5) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_3(c)$ for differentialligningen $(***)$, og bestem de $c \in \mathbf{R}$ for hvilke differentialligningen $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\},$$

og for ethvert $n \in \mathbf{N}$ betragter vi tillige afbildningen $f_n : A \to A$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, z \in A : f_n(z) = z^n.$$

(1) Vis, at for ethvert $n \in \mathbf{N}$ har afbildningen f_n mindst et fixpunkt $z^* \in A$. Dvs., at $f(z^*) = z^*$.

(2) For ethvert $n \in \mathbf{N}$ skal man bestemme alle fixpunkterne for funktionen f_n.

Vi betragter herefter følgen (z_n) (af punkter fra mængden A), som er defineret ved forskriften

$$\forall\, n \in \mathbf{N} : f_n(z) = f_n\left(\frac{i}{2}\right).$$

(3) Vis, at følgen (z_n) er konvergent, og bestem grænsepunktet.

(4) Lad

$$\zeta_0 \in A^O = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$$

være vilkårligt valgt. Vis, at følgen (ζ_n), hvor betingelsen

$$\forall\, \in \mathbf{N} : \zeta_n = f_n\left(\zeta_0\right)$$

er opfyldt, er konvergent, og bestem grænsepunktet for denne følge.

Opgave 3. Vi betragter den vektorfunktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, 3x_1 - 5x_2^2).$$

(1) Bestem Jacobimatricen $Df(x_1, x_2)$ for vektorfunktionen f i et vilkårligt punkt $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Godtgør, at Jacobimatricen $Df(1,1)$ er regulær, og påvis, at der findes en åben omegn V af $(1,1)$ og en åben omegn W af $f(1,1)$, så restriktionen $f\,|_V$ af f til V er en bijektiv afbildning af V på W.

(3) Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - f(1,1) = Df(1,1) \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

med hensyn til vektoren $x = (x_1, x_2)$.

Lad (x_k) være en vilkårlig følge af punkter fra $\mathbf{R}^2$, og lad der være givet et tal $r > 0$, så betingelsen

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : x_k \in B(\underline{0}, r)$$

er opfyldt.

(4) Vis, at følgen (x_k) har en konvergent delfølge (x_{k_p}) med grænsepunkt x_0. Hvad kan man sige om $\|x_0\|$?

Vi betragter herefter følgen (ξ_k), som er givet ved forskriften

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : \xi_k = f(x_k).$$

(5) Godtgør, at delfølgen $(\xi_{k_p}) = (f(x_{k_p}))$ er konvergent med grænsepunktet $\xi_0 = f(x_0)$.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{2}} \left(u^2 + x + u + x^2\right) dt.$$

Vi skal løse det optimale kontrolproblem at minimere integralet $I(x)$, idet $\dot{x} = u - x$, $x(0) = -\frac{1}{2}$ og $x(\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$.

(1) Opskriv Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$ for dette optimale kontrolproblem.

(2) Vis, at dette optimale kontrolproblem er et minimumsproblem.

(3) Bestem det optimale par (x^*, u^*), som løser problemet.