Skriftlig eksamen på Økonomistudiet

Sommeren 2018

DYNAMISKE MODELLER

Onsdag den 15. august 2018

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

OBS: Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du kontakte eksamenstilsynet for at blive registeret som syg.

I den forbindelse skal du udfylde en blanket.

Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen.

Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende en lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Københavns Universitets Økonomiske Institut

2. årsprøve 2018 S-2DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Onsdag den 15. august 2018

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 12e^t + t^2.$$

(1) Udregn tallene $P(2i)$ og $\sqrt{P(2i)}$.

(2) Vis, at betingelsen

$$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + z + 1)$$

er opfyldt.

(3) Bestem samtlige rødder i polynomiet P.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + s\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

(6) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_4(s)$ for differentialligningen $(***)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, hvor $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Opgave 2. Vi betragter vektorfunktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som er givet ved forskriften

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1x_2, x_1 + x_2^2).$$

(1) Bestem Jacobimatricen $Df(x_1, x_2)$ for vektorfunktionen f i et vilkårligt punkt $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}$, og vis, at Jacobimatricen $Df(1, 1)$ er regulær.

(2) Angiv differentialet $df(1, 1)$ for vektorfunktionen f ud fra punktet $(1, 1)$.

(3) Godtgør, at der findes åbne omegne V og W af $(1, 1)$ og $f(1, 1)$, så restriktionen af f til omegnen V er en bijektiv afbildning af V på W.

(4) Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(1, 1) + df(1, 1)$$

med hensyn til $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Lad (v_k) være en punktfølge på mængden

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le 5 \land -1 \le x_2 \le 7\}.$$

(5) Vis, at punktfølgen $(f(v_k))$ har en konvergent delfølge $(f(v_{k_p}))$, som har et grænsepunkt $g \in f(K)$.

Opgave 3. Vi betragter systemet

$$\tau = \{\emptyset, \mathbf{C}, G(r) \mid r > 0\},$$

hvor $G(r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r\}$ for $r > 0$.

(1) Vis, at systemet τ er en topologi på mængden $\mathbf{C}$.

(2) Bestem systemet κ af alle afsluttede mængder i den ovenfor anførte topologi.

Vi betragter mængden

$$M = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

(3) Bestem systemet τ_M bestående af alle mængder, der er åbne relativt til M.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(x^2 + xe^t + \dot{x}^2\right) dt,$$

hvor $x(0) = 0$ og $x(1) = \frac{5}{4}e$.

(1) Vis, at dette variationsproblem er et minimumsproblem.

(2) Løs dette variationsproblem.