Skriftlig eksamen på Økonomistudiet

Sommerskolen 2019

DYNAMISKE MODELLER

Onsdag den 14. august 2019

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Sygdom under eksamen

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du kontakte eksamenstilsynet for at blive registeret som syg.

I den forbindelse skal du udfylde en blanket.

Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen.

Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende en lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Undgå eksamenssnyd

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven bruger hjælpemidler, der ikke er tilladte, kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre, eller hvis du på nogen måde overtræder de regler, der gælder for prøven.

Københavns Universitets Økonomiske Institut

Kandidatstudiet 2019 S-K DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Onsdag den 14. august 2019

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^3 + (4+a)z^2 + (3+4a)z + 3a.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (4+a)\frac{d^2x}{dt^2} + (3+4a)\frac{dx}{dt} + 3ax = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (4+a)\frac{d^2x}{dt^2} + (3+4a)\frac{dx}{dt} + 3ax = e^t,$$

(1) Vis, at for ethvert $a \in \mathbf{R}$ er tallet $z = -a$ en rod i polynomiet P_a, og bestem dernæst samtlige rødder i dette polynomium samt deres multipliciteter.

(2) Bestem for ethvert $a \in \mathbf{R}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

(3) Bestem for ethvert $a \in \mathbf{R}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 4s\frac{d^2x}{dt^2} + s\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

(4) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_3(s)$ for differentialligningen $(***)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, hvor $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : f(z) = (1+i)z + z^2.$$

(1) Udregn funktionsværdierne $f(i)$ og $f(1-i)$.

(2) Løs ligningen

$$z^2 + (1+i)z - (1+i) = 0.$$

Vi betragter mængden

$$K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

(3) Vis, at billedet $f(K) = \{f(z) \mid z \in K\}$ er en kompakt mængde i den sædvanlige topologi på $\mathbf{C}$.

Idet $a \in \mathbf{R}_+$ er vilkårligt valgt, betragter vi mængdesystemet

$$\sigma = \{\mathbf{C}, \emptyset, G_a\}$$

af delmængder fra $\mathbf{C}$, hvor $G_a = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z < a\}$.

(4) Vis, at mængdesystemet σ er en topologi på $\mathbf{C}$.

(5) Beskriv systemet $\chi = \chi(\sigma)$ af afsluttede mængder i topologien σ.

(6) Undersøg om mængden

$$B = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z < 1\}$$

er kompakt i topologien σ.

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = \left(x^2 - y^2, x^3 + y^3\right).$$

(1) Bestem mængden

$$N(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = \underline{0}\}.$$

(2) Bestem Jacobimatricen $Df(x, y)$ for vektorfunktionen f i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(3) Bestem mængden

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid Df(x, y) \text{ ikke er regulær}\}.$$

(4) Godtgør, at der findes åbne delmængder V og W af $\mathbf{R}^2$, så $(1, 1) \in V$ og $f(1, 1) \in W$, og således at restriktionen $g = g_V$ af f til V er en bijektiv afbildning af V på W.

(5) Opstil differentialet

$$df(1,1) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Df(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix},$$

hvor $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \Big(-3x^2 + 2x - u^2 \Big)\, dt,$$

hvor $\dot{x} = f(t, x, u) = x + u$, og hvor man desuden har, at $x(0) = \frac{1}{4}$ og $x(1) = \frac{5}{4}$.

(1) Opstil Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$ for dette optimale kontrolproblem, og vis, at det er et maksimumsproblem.

(2) Bestem det optimale par (x^*, u^*) for dette optimale kontrolproblem.