Skriftlig eksamen på Økonomistudiet

Vinteren 2019 - 2020

DYNAMISKE MODELLER

Torsdag den 16. januar 2020

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler.
Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke lommeregnere eller cas-værktøjer.

Dette sæt omfatter 3 sider med 4 opgaver ud over denne forside

Sygdom under eksamen

Bliver du syg under selve eksamen på Peter Bangs Vej, skal du kontakte eksamenstilsynet for at blive registeret som syg.

I den forbindelse skal du udfylde en blanket.

Derefter afleverer du en blank besvarelse i systemet og forlader eksamen.

Når du kommer hjem, skal du kontakte din læge og indsende en lægeerklæring til Det Samfundsvidenskabelige Fakultet senest en uge efter eksamensdagen.

Undgå eksamenssnyd

Det er eksamenssnyd, hvis du under prøven bruger hjælpemidler, der ikke er tilladte, kommunikerer med andre eller på anden måde modtager hjælp fra andre, eller hvis du på nogen måde overtræder de regler, der gælder for prøven.

Københavns Universitets Økonomiske Institut

Kandidatstudiet 2020 V-K DM ex

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Torsdag den 16. januar 2020

Opgavesæt bestående af 3 sider med i alt 4 opgaver.

Løsningstid: 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler må benyttes, dog ikke medbragte lommeregnere eller nogen form for cas-værktøjer.

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 8z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 50e^t + 4t^2 + 24t + 44.$$

(1) Vis, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^2 + 2z + 2)^2.$$

Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P, og angiv deres multipliciteter.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og afgør om denne differentialligning er globalt asymptotisk stabil.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 2s\frac{d^2x}{dt^2} + s\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

(4) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_4(s)$ for differentialligningen $(***)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, hvor $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

(1) Udregn funktionsværdierne $f(1+i)$ og $f(2i)$.

(2) Løs ligningen $f(z) = 1$.

(3) Løs ligningen

$$f(z) = f(\overline{z}).$$

Vi betragter mængden

$$M = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

(4) Vis, at mængden

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$$

er afsluttet relativt til mængden M.

(5) Bestem det indre A^O og randen ∂A af mængden A relativt til M.

(6) Afgør, om mængden A er kompakt relativt til M.

Opgave 3. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } \; x < 0 \\ [0,2], & \text{for } \; 0 \leq x < 1 \; . \\ [-1,5] \cup \{7\}, & \text{for } \; x \geq 1 \end{cases}$$

Desuden betragter vi funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, der har forskriften

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 x.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

(4) Bestem fikspunkterne for korrespondancen F.

(5) Bestem en forskrift for den maksimale værdifunktion $v_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : v_u(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}.$$

(6) Bestem en forskrift for den tilhørende maksimale værdikorrespondance M_u.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \Big(- x^2 + 2x - u^2 \Big)\, dt,$$

hvor $\dot{x} = f(t, x, u) = 2u$, og hvor man desuden har, at $x(0) = 1$ og $x(1) = 5$.

(1) Opstil Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$ for dette optimale kontrolproblem, og vis, at det er et maksimumsproblem.

(2) Bestem det optimale par (x^*, u^*) for dette optimale kontrolproblem.