Mikro Opgavesæt 6

Regnes til øvelserne 8–9/5

Opgave 1

En virksomhed kan producere et output ved hjælp af et input, via produktionsfunktionen $y = f(x) = Ax^a$ hvor $A, a > 0$. Prisen på output er $p > 0$ og prisen på input er $w > 0$.

a) Vis at for $t > 1$ er $f(tx) = t^a f(x)$. For hvilke værdier af parametrene A, a udviser teknologien voksende skalaafkast? Konstant skalaafkast?

b) Antag at der er konstant skalaafkast. Begrund at virksomhedens profit må være 0. Vis at virksomheden kun vil have positiv produktion $(y, x > 0)$ såfremt $w/p = A$. Bemærk således, at skal virksomheden med konstant skalaafkast faktisk producere noget, lægger det en restriktion på de relative priser.

c) Antag at der er voksende, ikke-konstant skalaafkast. Begrund at virksomhedens profit må være 0. Begrund at virksomheden ikke kan have positiv produktion.

d) Antag at $a < 1$. Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem. (Vink: problemet minder om opgave 2 på mikro-opgavesæt 1.)

Opgave 2

Virksomheden har Cobb-Douglas produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$ hvor $A, a, b > 0$.

a) Find marginalproduktet af hver vare. Hvilken betingelse på parametrene A, a, b sikrer at $MP_1(x_1, x_2)$ er aftagende i x_1? At $MP_2(x_1, x_2)$ er aftagende i x_2?

b) Find det teknologiske substitutionsforhold (TRS).

c) For givet $y > 0$ er en isokvant givet ved ligningen $y = f(x_1, x_2)$. Omskriv denne ligning så du finder x_2 som funktion af x_1. Skitsér en isokvant, og argumentér for at den er konveks.

d) Fra resultatet i c), find isokvantens hældning. Husk at $y = f(x_1, x_2)$ og kontrollér nu at dit svar passer med TRS fundet i b).

e) Vis at for $t > 1$ er $f(tx_1, tx_2) = t^{a+b} f(x_1, x_2)$. For hvilke værdier af parametrene A, a, b udviser teknologien voksende skalaafkast? Konstant skalaafkast?

Opgave 3

En virksomhed har Cobb-Douglas produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$ hvor $A, a, b > 0$ og $a + b = 1$. Vi betragter virksomheden på langt sigt, hvor både x_1 og x_2 kan vælges frit. Virksomheden tager priserne $p, w_1, w_2 > 0$ for givne.

a) Vis at teknologien har konstant skalaafkast, og begrund at profitten må være 0.

b) Begrund at $TRS = -w_1/w_2$ hvis virksomheden har positiv produktion ($y, x_1, x_2 > 0$).

c) Fra opgave 2 b) kender du TRS, ellers beregn det nu. Løs så ligningen $TRS = -w_1/w_2$ så du får x_2 som funktion af x_1.

d) Udnyt c) til at vise

$$y = A\left(\frac{bw_1}{aw_2}\right)^{1-a} x_1.$$

e) At profitten er nul, giver en ligning i y, x_1, x_2. Indsæt dine resultater fra c) og d) så du får en ligning i x_1. Bemærk at $x_1 > 0$ kan udgå af denne ligning. Til slut har du en restriktion der involverer priserne p, w_1, w_2. Bemærk således, at skal virksomheden med konstant skalaafkast faktisk producere noget, lægger det en restriktion på de relative priser.

Opgave 4

I denne opgave regnes på en Robinson Crusoe økonomi med et input, altså svarende til bogens kap. 30.1–8.

Forbrugeren har Cobb-Douglas præferencer, $u(C, F) = C^{1/2}F^{1/2}$. Her betegner C forbruget af kokosnødder, og F forbruget af fritid. Forbrugerens initialressourcer er $(0, 1)$, dvs. han besidder en enhed tid.

a) Idet forbrugeren tager priser $p, w > 0$ for givne på hhv. kokosnødder og tid, opskriv den velkendte efterspørgsel efter C og F når hans indkomst er M.

Teknologien kan omforme tid til kokosnødder via produktionsfunktionen $Y = L^{1/2}$. Her betegner Y output af kokosnødder, og L input af arbejdstid.

b) For givne priser $p, w > 0$, opskriv løsningen på virksomhedens profitmaksimeringsproblem. Vær omhyggelig med at beregne virksomhedens profit π som funktion af p, w. (Vink: Problemet blev løst i opgave 2 på mikro-opgavesæt 1 og igen i opgave 1 ovenfor.)

c) Idet forbrugerens indkomst er værdien af initialressourcer plus profitten, dvs. $M = w + \pi$, opskriv forbrugerens efterspørgsel efter C og F som funktion af p, w.

d) Begrund at markederne clearer ved priserne p, w såfremt $C = Y$ og $F + L = 1$. Lad $p = 1$ og bestem det markedsclearende w. Opskriv derpå hvad C og F bliver i markedsligevægt.

e) Antag nu at økonomien ikke er organiseret som en markedsøkonomi. I stedet har forbrugeren direkte kontrol over teknologien. Problemet er da at vælge C og F der maksimerer nytten, givet den teknologiske bibetingelse $C = (1 - F)^{1/2}$. Løs dette problem.

f) Kontrollér at løsningsværdierne for C og F var de samme i d) og e). Fortolk dette ud fra velfærdsteoremerne.