Forord til 1. udgave

Denne bog handler om den del af økonomisk teori, der beskæftiger sig med samspillet mellem enkelte agenters økonomiske handlinger i et samfund.

Bogens tilblivelseshistorie har i nogen grad bestemt, hvorledes stoffet er organiseret. Arbejdet med bogen startede i efteråret 1979 som et eksperiment, der tog sigte på at erstatte den tidligere brugte lærebog (Malinvaud (1972)) med et sæt undervisningsnoter, der i højere grad var baseret på netop de polit-studerendes forkundskaber og færdigheder. Som følge heraf behandler kapitlerne 3 – 6 i denne bog i store træk de samme emner som kapitlerne 2 – 5 i Malinvauds bog.

Undervejs viste det sig dog hensigtsmæssigt, dels at inddrage visse nyere teoridannelser for derved at bringe gennemgangen af teorien up to date, dels at give en kort orientering om tilgrænsende emner, som f.eks. spilteori og social choice. På den anden side er en række emner, behandlet i Malinvaud, udeladt. Det skal fremhæves, at Malinvauds lærebog stadig kan anbefales som alternativ fremstilling og supplement.

Ved udgivelsen af noterne som bog er der foretaget en del mindre rettelser i teksten og tilføjet et afsnit om generationsøkonomier i kapitel 8. Endelig er et lille matematisk kompendium, som igennem flere år har været brugt som reference ved gennemgangen, tilføjet som et appendiks.

Det vil være på sin plads til sidst at erkende den taknemmelighedsgæld, som jeg har pådraget mig under udarbejdelsen af denne bog, først og fremmest til Karl Vind for den teoretiske grundholdning, der – håber jeg – i et vist omfang vil blive bragt videre igennem denne bog. Dernæst til andre medarbejdere ved Økonomisk Institut, således Frode Terkelsen og Michael Blad, som gennemlæste manuskriptet ved dets tilblivelse, og – især – til Birgit Grodal, som har givet en lang række konkrete forslag til forbedringer. Endelig skylder jeg en tak til flere hold af polit-studerende, som tog positivt mod de nye undervisningsnoter, og en særlig tak til stud.polit. Jens Erik Larsen, der har udarbejdet stikordsregisteret.

København, den 17. maj 1982

Hans Keiding

Forord til 2. udgave

I anden udgave er der rettet en del trykfejl. Videre er afsnittet om usikkerhed udbygget til et sidste, niende kapitel, således at forventet nytte og incitamentproblemer kan behandles.

København, den 3. maj 1987

Hans Keiding

Forord til denne udgave

Efter flere genoptryk af den 2. udgave, som efterhånden var kommet at se lidt bedaget ud, har vi gennemgået manuskriptet – og ikke mindst, omsat det til TEX– således at den forhåbentlig nu fremstår som lidt mere læsevenlig.

Det kan ikke undgås, at en godt 20 år gammel bog bærer præg af sin alder; visse udtryk og fremstillingsmåder er i mellemtiden blevet politisk ukorrekte (som f.eks. den konsekvente omtale af økonomiske agenter som "han") og andre nærmest uforståelige, fordi der refereres til forhold, som i dag er helt passé. Vi har luget ud med en vis forsigtighed ("han" er således bibeholdt) og opdateret hist og her uden at camouflere, at bogen grundlæggende har en del år på bagen. Der er kommet et par nye afsnit ind hist og her, et enkelt af dem, der handler om efficiensmåling, drejer sig om teoridannelser fra de seneste to årtier.

Endelig er der kommet øvelsesopgaver efter hvert kapitel; flere af dem er hentet fra Eksamensopgaver ved Økonomi I på MØK-studiet ved Handelshøjskolen, hvor bogen har været brugt i mange år.

København, den 25. november 2002

Bodil Olai Hansen
Hans Keiding

Indhold

1. Indledning

1.1. Hvad er mikroteori?

1.1.1. Det er normalt svært at give en dækkende beskrivelse af et fagområde i få ord. Her er et forsøg:

Mikroteorien handler om samspillet mellem økonomiske agenter inden for forskellige institutionelle rammer.

Det bliver man nu nok ikke meget klogere af. Dels er “agenter” og “institutionelle rammer” indtil videre uafklarede begreber, dels er det svært at se, hvorved mikroteori adskiller sig fra økonomisk teori som helhed.

Den første mangel vil vi så rigeligt råde bod på senere hen. Den anden vil vi kigge lidt nærmere på.

1.1.2. Umiddelbart kunne man forvente, at mikroteorien var karakteriseret ved, at man her interesserede sig for “små enheders” (forbrugeres, virksomheders) økonomi, mens hele samfundets økonomi hører til i makroteorien.

Det har muligvis været en rigtig sondring engang, men det er det i hvert fald ikke mere. Godt nok skal vi undervejs beskæftige os med forbrugeren og virksomheden, men vor hovedinteresse vil ligge på “samspillet” – at se, hvad der sker, når man skal have disse forbrugere og virksomheder til at fungere som en hel økonomi.

Dette skal ikke forstås sådan, at vi prøver at tage brødet ud af munden på makroøkonomerne. Forholdet er det simple, at der ikke findes nogen teori (selv ikke Keynes-modellen), der kan bruges i alle situationer. Mikroteorien har et andet sigte end makroteorien. Herom lidt mere i næste afsnit.

1.1.3. Mikroteorien har som formodentlig bekendt ry for at være meget matematisk, for at være matematik og ikke ret meget andet.

Det sidste er i hvert fald forkert. Den matematik, vi skal bruge, er som matematik betragtet temmelig triviel. Det første er der derimod et vist hold i. Når vi bruger matematik her, er det, fordi vi er nødt til det. Faktisk er det for at gøre det lettere at ræsonnere i de situationer, vi betragter – vi skal holde styr på en masse varestrømme mellem en masse agenter. Hvis vi ikke er præcise, smutter det hele ud mellem fingrene, og man må nøjes med det rene pølsesnak.

1.1.4. Som antydet er det ikke hensigten med disse noter at underspille matematikkens rolle. Tværtimod skal det understreges, at mikroteoriens metode –

præcisering af forudsætninger, således at man kan drage nogle konklusioner af disse – er nok så væsentlig som de konkrete modeller, vi skal behandle; modeller, der i en introduktion nødvendigvis må være ret primitive. Endda gælder det, at denne metode er trængt frem inden for andre økonomiske discipliner end de traditionelt mikroøkonomiske. Det ville derfor være fup at lade som om, man sagtens kan undvære matematikken.

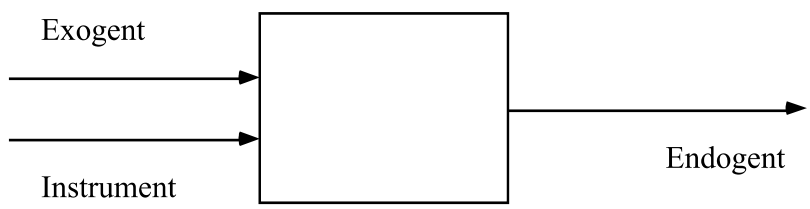
Noget andet er, at vi med den forholdsvis beskedne baggrund, som kan forventes af læseren, ikke kan hoppe lige ud i en formaliseret teori. Strategien er derfor at introducere den matematiske beskrivelse på det tidspunkt, hvor den falder "naturlig". Lad os håbe, at det lykkes.

1.2.* Lidt om systemer

1.2.1. For at give en fornemmelse af, hvad der er sigtet med den moderne mikroteori, er det hensigtsmæssigt at komme en smule ind på systemteori.

Mikroteorien – og i øvrigt også megen anden økonomisk teori – beskæftiger sig med økonomiske systemer. Hvad er det? Ordet "system" er i dagligdags brug mildest talt uklart: Man kan være "bidt af systemet" eller omvendt mene, at der intet "system" er i den danske økonomiske politik. Hvad vi mangler, er åbenbart en præcisering af begrebet et system.

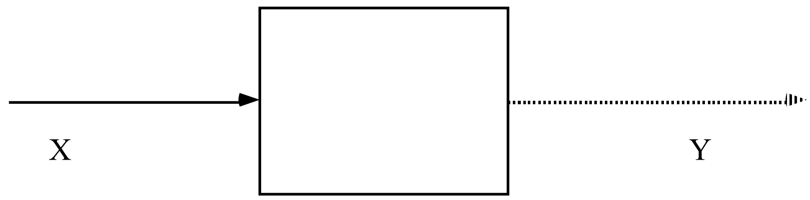
Til vort formål vil vi imidlertid nøjes med et par eksempler: En formodentlig velkendt måde at anskue en økonomi på er at specificere, hvad der er eksogent, endogent og eventuelt hvilke politiske instrumenter, der forefindes. Dette kan f.eks. illustreres således:



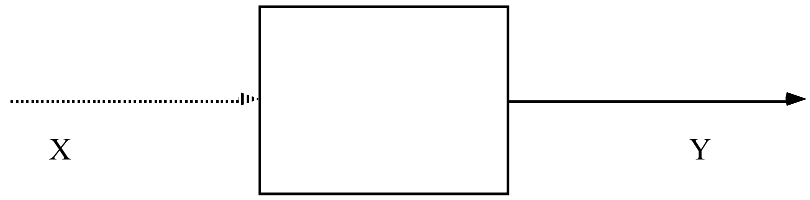
Ind i kassen går påvirkninger fra eksogene variable og kontrolvariable. Disse kunne vi passende kalde input i modellen. Hvis vi midlertidigt glemmer sondringen mellem eksogene og kontrolvariable, kan vi simplificere vort system til

eller, som det kaldes, et generelt input-output system (som ikke skal forveksles med de økonomiske input-output modeller, der er et specialtilfælde heraf).

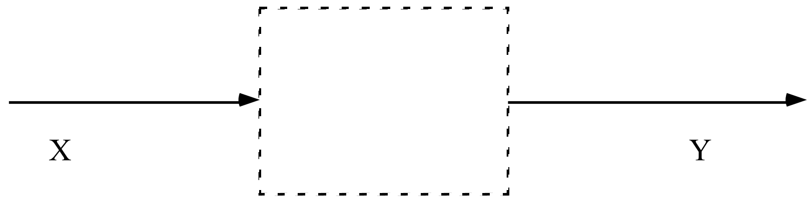
1.2.2. For et system af typen ovenfor er der tre problemstillinger: (1) Man kender input og systemets funktion og ønsker at forudsige output,



eller (2) man har specificeret systemet og output og ønsker at finde et input, der vil give det ønskede output,



eller (3) man har specificeret input og output og ønsker at konstruere et system, der transformerer input til output på den specificerede måde:



I de modeller, som vi skal beskæftige os med, vil vi få eksempler på alle tre betragtningsmåder. Det er altså ikke her, at mikroteorien adskiller sig fra anden økonomisk teori.

1.2.3. Det er oplagt, at vore figurer kunne illustrere andre systemer end netop økonomiske. Systemteori er faktisk i høj grad tværfaglig. Et nærliggende eksempel på et system er en datamat (terminologien i systemteori er netop inspireret heraf). Input er programmet (eller for en mere primitiv regnemaskine en følge af tal og $+$'er, $-$'er osv., som tastes ind), output er resultatet af maskinens beregning.

For brugeren af en regnemaskine er det normalt ligegyldigt, hvordan maskinen er konstrueret. I vor terminologi kan han betragte maskinen som en black box, hvis indre er ukendt, men som reagerer på en vis specificeret måde på ydre påvirkninger.

Hvis man derimod skal konstruere en maskine, der kan foretage visse bestemte operationer (det er problemstillingen (3) fra (1.2.2)), må man ind i boksen. I vort datamat-eksempel vil man da opdage, at den er bygget op af et begrænset antal komponenter (men der er godt nok mange af dem), hvis funktionsmåde hver især er meget simpel. Sammensætningen af simple komponenter er til gengæld i stand til at udføre en næsten uoverskuelig mængde af komplicerede operationer.

1.2.4. Med lidt håndfast generalisering kan man sige, at det er denne forskel i angrebsvinkel, der adskiller makro- og mikroteori. Vort formål med at brække den "sorte boks" op er at undersøge, om den kan opfattes som bestående af simple komponenter – og i så fald hvilke andre måder disse simple komponenter kan sammensættes på.

Oplagte kandidater til at være simple komponenter er naturligvis forbrugere, virksomheder og eventuelt andre agenter. Input- og outputstrømme mellem disse komponenter vil hovedsageligt være varestrømme, men der vil også være informationsstrømme mellem komponenterne. Dette aspekt, beskrivelse af informationsstrømme, er dog endnu ikke tilfredsstillende løst, og vi vil behandle det meget rudimentært.

1.2.5. Som bekendt foregår de økonomiske processer over tid. Den korrekte fortolkning af input i vore økonomiske systemer må derfor være en specificering af alle de påvirkninger, vort system har fået gennem hele historien.

Det ligger i luften, at systemet må være ret kompliceret. En mulig vej til at simplificere det antydes af vores regnemaskineeksempel. Efter samme betragtning som ovenfor må input være hele forhistorien – alle de tastninger, der er foretaget, siden maskinen kom fra fabrikken.

Nu ved vi imidlertid, at vi for at kende output i dette tilfælde kan nøjes med at specificere, dels hvilken tast der trykkes på, og dels hvad der står i registret. Hele den lange forhistorie er ligegyldig. Det simplificerer unægtelig problemet: I stedet for at betragte lange sekvenser af input over tid kan vi nøjes med det sidste input og en beskrivelse af systemets tilstand ved (forhåbentlig) få variable.

Vi vil behandle vore økonomiske systemer på samme måde, dvs. søge en række tilstandsvariable, der opsummerer systemets forhistorie. Derved ryger tiden ud som eksplicit variabel, men som vi har argumenteret for, er dette ikke udtryk for en ahistorisk betragtningsmåde, men en simplificering af analysen.

1.3. Agenter og varer

1.3.1. I alt det følgende skal vi behandle økonomiske systemer, idet vores angrebsvinkel er at finde nogle få systemkomponenter, der kan beskrives relativt simpelt, og derpå undersøge forskellige kombinationer af disse simple komponenter.

Vor generelle betegnelse for komponenterne i det økonomiske system er *agenter.* Vi skal betragte forskellige typer af agenter, især *forbrugere* og *producenter.* Af og til vil der optræde andre agenter, således i kap. 5 en *planmyndighed* og i kap. 7 en *offentlig sektor.*

1.3.2. Strømmene mellem de enkelte agenter kan være af forskellig karakter, men oftest drejer det sig om varestrømme. Der er mere gemt i det uskyldige begreb "en vare", end man umiddelbart ville tro, og vi skal diskutere det lidt nærmere.

1.3.3. Først vil vi notere os, at der i vore modeller er mere end én vare. I relation til den virkelighed, vi ønsker at beskrive, synes det at være en rimelig antagelse. Det gør naturligvis vores modeller mere komplicerede, end hvis der kun var en enkelt vare, men da vi bl.a. skal undersøge, hvorledes priser på forskellige varer fastsættes, kan vi dårligt undgå det. Til senere reference vedtager vi derfor

Der er i økonomien l forskellige varer.

Her er l et ikke nærmere specificeret (naturligt) tal.

1.3.4. Når vi skal skrive op, f.eks. hvor meget en given forbruger får af de forskellige varer, må vi specificere det ved at opgive mængden x_1 af vare nr. 1 (i en eller anden passende måleenhed), x_2 af vare nr. 2 osv. op til x_l af vare nr. l. Det er bekvemt at skrive dette kort som

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_l).$$

En sådan liste x af mængder af de l forskellige varer vil vi kalde et *varebundt*. Bemærk, at vort varebundt x er en vektor med l koordinater. Mængden af alle vektorer med l koordinater (hvor hver koordinat er et reelt tal) betegnes normalt med $\mathbb{R}^l$ (og kaldes det l-dimensionale euklidiske rum). Vi har altså $x \in \mathbb{R}^l$ for vort varebundt x. Dette udtrykker man ofte ved at sige, at *varerummet er* $\mathbb{R}^l$.

Som bekendt kan vi lægge vektorer $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1l})$ og $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2l})$ sammen, nemlig ved

$$x_1 + x_2 = (x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}, \ldots, x_{1l} + x_{2l})$$

(koordinatvis addition) og gange vektoren $x = (x_1, \ldots, x_l)$ med et reelt tal λ ved $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_l)$. Disse regneoperationer har en naturlig fortolkning, når vektorerne er varebundter (hvis x_1 og x_2 er forbruget hos forbruger 1 og 2, er $x_1 + x_2$ deres samlede forbrug osv.).

1.3.5. Hvad er varer? Det er naturligt at opfatte ikke blot materielle goder (kartofler, øl, køleskabe osv.), men også tjenesteydelser (skopudsning, transport, undervisning i mikroteori) som varer.

Så langt er vor anvendelse af begrebet vare stort set i overensstemmelse med almindelig sprogbrug. Værre bliver det, hvis vi f.eks. skal tage stilling til om benzin fra Q8 eller Shell er én vare (“benzin”), to forskellige varer (Q8-benzin og Shell-benzin) eller muligvis endnu flere (benzin med oktantal 99 leveret fra Shell i Smørumovre osv.).

Vort grundprincip her vil være, at hvis der er nogen agenter i økonomien, som opfatter det som forskellige varer, ja så er det forskellige varer (uanset om det eventuelt er det samme sprøjt, de forskellige tankstationer sælger). Lad os betragte nogle typiske situationer:

1.3.6. *Kvalitet.* Det er forholdsvis oplagt, at hvis en vare (i almindelig sprogbrug) leveres i forskellige kvaliteter (som i vort benzineksempel med forskelligt oktantal), må vi betragte disse forskellige kvaliteter som forskellige varer. Derved bliver der naturligvis mange flere varer i økonomien, end vi først troede, men vi har jo alligevel ikke specificeret l, så det gør ikke noget.

1.3.7. *Lokalitet.* Det kan også have betydning, hvor varen leveres. Hvis man befinder sig i København, er der ikke meget ved at få rådighed over en bajer i Herning. Vi må derfor sondre mellem varer, som leveres på forskellige steder.

Derved svulmer mængden af forskellige varer igen op, og det kan endda blive for meget, nemlig hvis vores varer kan leveres overalt i landet, for så er der jo uendelig mange lokaliteter. Vi vil derfor antage, at der er L punkter i landet, hvor de forskellige Q varetyper kan tænkes leveret. Derved får vi i alt $l = QL$ forskellige varer.

1.3.8. *Tid.* De færreste forbrugere vil være ligeglade med, om de får en given ydelse i dag eller om ti år. Altså må vi også sondre mellem varer med forskelligt leveringstidspunkt. Formelt kan vi forestille os, at varer kan leveres på tidspunkt 1 (i dag), 2, 3 osv. op til T. Længere frem end T perioder antages det, at ingen kan disponere (T kaldes den fælles økonomiske horisont). Hvis der i forvejen var K slags varer, får vi $l = KT$.

1.3.9. En fordel ved vor omhyggelige fortolkning af varebegrebet er, at vores modeller kan beskrive flere aspekter af virkeligheden, end det umiddelbart synes: Når vi blot siger, at agenterne køber og sælger de l varer, virker dette, som om man har abstraheret fra, at disse transaktioner foregår over tid og på forskellige steder. Men det er alligevel med, idet tid og sted kan indfortolkes i varebegrebet. Man kan endda gå videre endnu og også få usikkerhed ind – men det vil vi udskyde til kap. 9.

1.4. Institutioner

1.4.1. Vi har nu indført agenter og varer og mangler kun (jf. (1.1.1)) at forklare, hvad vi vil forstå ved "institutionelle rammer". Det vil vi gøre ved en række eksempler.

Lad os først betragte en meget simpel økonomi, hvor der ikke er nogen producenter, ikke fordi vi tror, at det er særligt realistisk, men for at introducere vor betragtningsmåde i en særlig simpel situation.

Der foreligger i økonomien visse mængder af de l forskellige varer. Vi kan skrive denne initialbeholdning som en vektor

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l).$$

Det, der skal ske i økonomien, er, at ω skal fordeles på en eller anden måde blandt de (lad os sige) m forbrugere. Derved får vi m vektorer

$$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1l}),\ x_2 = (x_{21}, \ldots, x_{2l}), \ldots,\ x_m = (x_{m1}, \ldots, x_{ml}).$$

Vi kan skrive disse m vektorer eller varebundter som $(x_1, \ldots, x_m)$ (dette er igen en vektor, men med ml koordinater) og kalde det en *tilstand* i økonomien. Hvis tilstanden er fremkommet ved fordeling af initialbeholdningen, må der for hver vare h gælde, at

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ih} = \omega_h, \ h = 1, \ldots, l,$$

eller skrevet på vektorform

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \omega.$$

Der er umiddelbart mange måder at lave en sådan fordeling på. Lad os se på nogle:

l.4.2. Eksempel: *Diktatur.* Vi kan udpege én af forbrugerne (f.eks. nr. 1) og lade ham bestemme tilstanden. Denne fremgangsmåde har ikke intuitiv appel: Formodentlig vil han skele kraftigt til egen fordel (hvilket jo ikke er særlig fair over for de andre), men selv hvis han var filantrop, vil der være problemer – han skal jo vide noget om, hvilke varebundter de andre vil have, for at gøre dem tilpas.

l.4.3. Eksempel: *Direkte demokrati.* Vi kan i stedet lade forbrugerne stemme om, hvilken tilstand der skal gennemføres. Nu er alle godt nok med til at bestemme, men der kommer nye problemer (rent bortset fra, at det bliver en lang stemmeseddel). Dem kommer vi ind på i kap. 2.

1.4.4. Eksempel: *Parvise bytter.* Antag, at vi starter med at dele initialbeholdningen ud på en eller anden måde. Vi tillader dernæst forbrugerne at bytte med hinanden. Forbruger i kan f.eks. bytte 2 spegepølser mod 1 flaske cognac med forbruger j. Lader vi forbrugerne bytte med hinanden så meget, de vil, når vi frem til en tilstand opnået ved parvise bytter.

1.4.5. Eksempel: *Markeder.* Lad os ændre det foregående eksempel derhen, at i stedet for, at forbrugerne bytter med hinanden, indfører vi nu særlige markedsagenter, som tilbyder forbrugerne visse handeler. F.eks. kan en markedsagent tilbyde alle handeler, hvor forbrugeren modtager r kilo kaffe og afleverer $r \times 27,85$ kroner. Markederne kan være åbne for alle eller kun for visse forbrugere.

Standardeksemplet på markeder er dem, som er givet ved et prissystem. Herved forstås, at der er givet en pris på hver af de l varer, dvs. en vektor

$$p = (p_1, \ldots, p_l).$$

Ved det givne prissystem kan vi udregne værdien af et varebundt $x = (x_1, \ldots, x_l)$, nemlig ved

$$p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p_h x_h.$$

Læg mærke til, at højre side netop er det indre produkt (eller skalarproduktet) af vektorerne p og x. Derfor skriver vi værdien af varebundtet x ved prissystemet p som $p \cdot x$.

Markedet givet ved prissystemet p er da

$$M_p = \{z \in \mathbb{R}^l \mid p \cdot z \leq 0\},$$

idet der for et element $z = (z_1, \ldots, z_l)$ (dvs. en handel foretaget på markedet M_p) skal gælde, at værdien af de varer, forbrugeren har købt (de positive koordinater af z) højst må være lig værdien af de varer, han har solgt (de negative koordinater af z). Hvis $p \cdot z < 0$, er han rimeligvis blevet taget ved næsen, og det vil vi ikke udelukke på forhånd.

1.4.6. De foregående eksempler bærer et vist præg af skrivebordskonstruktion. I mere virkelighedsnære økonomiske systemer må vi have producenterne med. På nuværende trin vil vi blot antage, at producenterne kan vælge blandt en række teknisk mulige produktionsplaner, hver karakteriseret ved input og output af de l forskellige varer.

1.4.7. Eksempel: *Centraliseret planøkonomi.* Antag, at der er en planmyndighed, som kan fastsætte dels priser og lønninger, dels en række produktionsmål for hver af producenterne. Disse kan f.eks. være

(1) værdi af output ved de givne priser,
(2) specificeret output af visse konkrete varer,
(3) arbejdsproduktivitet (målt f.eks. som værdi af output divideret med værdi af arbejdsinput),
(4) profit (værdi af output minus værdi af input).

Virksomhederne skal da vælge produktionsplaner således, at produktionsmålene er opfyldt, og kan benytte profitten til at udbetale bonus til arbejderne. Forbrugerne kan vælge varebundter, hvis værdi ved de fastsatte priser højst svarer til, hvad de opnår ved salg af deres arbejdskraft til virksomhederne samt eventuel bonus.

1.4.8. Eksempel: *Fuldkommen konkurrence-økonomi.* Vi har her en markedsagent (eller “markedsmekanisme”), som fastsætter priser. Producenterne skal vælge produktionsplaner, der ved de givne priser giver så stor profit som muligt, og uddele denne profit til forbrugerne efter visse regler (aktieudbytter). Forbrugerne kan vælge mellem varebundter, hvis værdi ved de givne priser højst svarer til værdien af solgt arbejdskraft samt eventuelt aktieudbytte.

1.4.9. For et givet institutionelt set-up, f.eks. et af vore eksempler ovenfor, ønsker vi at karakterisere de tilstande, der må forventes at indtræffe, når agenterne overholder de specificerede regler.

Også andre problemstillinger har interesse. Tag f.eks. vort planøkonomi-eksempel. Her er det let at forestille sig, at der for visse valg af priser vil være utilfredsstillet efterspørgsel efter visse varer, og det ville eventuelt føre til sortbørshandel (dvs. handlinger uden om de institutionelle regler). Eller i eksempel (1.4.8): Hvis producenten opdager, at han er den eneste, som producerer en vis vare, vil han være tilskyndet til at handle som monopolist. Institutionerne er da ustabile i den forstand, at visse agenter ønsker at omgå dem.

Endelig vil man være interesseret i at sammenligne en række økonomiske systemer efter forskellige kriterier.

1.4.10. Til slut et par filosofiske betragtninger. For det første kan man af de foregående eksempler let have fået den opfattelse, at vi naivt opfatter samfundet som et urværk, som vi kan pille fra hinanden og samle igen, som vi har lyst. Det gør vi ikke. Det er klart, at samfundets institutioner dels i høj grad er bestemt af det pågældende samfunds forhistorie i bred forstand og dels virker tilbage på samfundet, dvs. på agenternes handlemåde. Men for ethvert konkret sæt af institutioner vil der være visse lovmæssigheder, som følger af deres indretning, og det er dem, vi studerer.

1.5. Noter

1.5.1. Det matematiske apparat, der benyttes i denne bog, er gennemgået i appendiks. Om end det er forudsat, at læseren i forvejen er bekendt med store dele af dette stof, kan hele det matematiske apparat, som er nødvendigt for mikroteorien, altså tilegnes ved læsning af ca. 10 sider ren matematik – en understregning af vores pointe fra 1.1.3.

1.5.2. Afsnittet om systemteori kan ifølge sagens natur ikke yde dette område fuld retfærdighed. Der findes flere bøger af introducerende karakter om emnet, f.eks. Klir (1969) og Pichler (1975).

1.5.3. Fortolkningen af varebegrebet er et emne, som vi vil vende tilbage til. Fremstillingen er baseret på Debreu (1959).

1.5.4. Den formaliserede behandling af institutioner i økonomisk teori blev påbegyndt af Vind (1976).

1.5.5. For læsere, der eventuelt måtte savne en historisk oversigt over udviklingen af det teoriområde, der skal behandles i det følgende, kan der henvises til f.eks. Arrow og Hahn (1971) kap. 1.

1.6. Opgaver

1.6.1. Et marked behøver ikke nødvendigvis at være givet ved et prissystem – eller *alene* ved et prissystem. Her er et par eksempler:

(i) Giv en grafisk fremstilling af markedet for en ydelse, som man kun kan modtage et vist antal gange i den givne periode (giv eksempler på sådanne!)

(ii) Vis grafisk formen på et marked, hvor købs- og salgspris er forskellige.

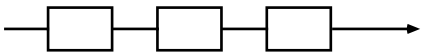
1.6.2. Antag, at to personer skal dele en varebeholdning bestående af 20 kilo gulerødder og 4 kartoner cigaretter imellem sig. Det træffer sig sådan, at den ene er ryger, mens den anden er ikke-ryger.

Den første oplagte metode er lige deling – begge får 10 kilo gulerødder og 2 kartoner cigaretter. Denne metode er *fair* – men kan den kritiseres ud fra andre synsvinkler, og i så fald hvilke?

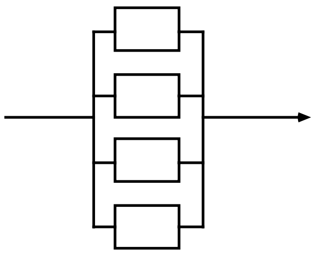
En anden metode er at vælge en *hakkeorden,* således at f.eks. person 1 vælger først og tager, hvad han vil have, hvorefter person 2 vælger fra, hvad der er tilbage (hvis der er noget), og så fremdeles. Vis at denne metode er *efficient* i den forstand, at man, efter at varerne er delt ud, ikke kan finde nogen anden måde at dele dem ud på, som stiller *alle* mindst lige så godt og nogle bedre. Er den fair?

En tredje metode kunne gå ud på at starte med at dele lige ud men derefter bytte ikke-rygerens cigaretter ud mod gulerødder i et bytteforhold, som er gennemsnittet mellem, hvad de to har angivet som deres bud på, hvorledes bytteforholdet skal være. Vis at denne ordning er både efficient og fair – men at den er *manipulerbar,* forstået således at der vil være nogen, som med fordel kan fortælle noget andet end sandheden om deres vurdering af goderne.

1.6.3. Der findes en særlig disciplin, nemlig teorien om *pålidelighed* (eng.: reliability), der beskæftiger sig med systemer, som er sammensat af mange komponenter, der hver især kan være ganske simple, f.eks. i serie eller parallel, som vist nedenfor i (a) og (b).



(a)



(b)

Hvis vi ser på systemer bestående af n komponenter, kan vi indføre variable $x_1, \ldots, x_n$, som er enten 0 eller 1 (fortolket som at komponenten enten er defekt eller virker. Strukturfunktionen $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ for systemet er tilsvarende 0 eller 1 afhængig af om det samlede system er nede eller virker. Find strukturfunktionen i tilfældene (a) og (b) ovenfor.

1.6.4. I visse sektorer af samfundsøkonomien benytter man (af grunde, som til dels vil blive belyst i senere kapitler) ikke markedet til allokering af varer og tjenester; således f.eks. i *sundhedsvæsenet,* hvor man i udstrakt grad leverer direkte og uden betaling ved observeret *behov.*

Hvad er et behov (generelt og i sundhedssektoren)? Giv et bud på, hvordan man kan planlægge produktionen, således at man er i stand til at levere, når behovene melder sig.

2. Valgsituationer, individuelt og kollektivt

2.1. Præferencer, alternativer (én agent)

2.1.1. I det foregående kapitel har vi set på nogle situationer, hvor der skal vælges mellem visse alternativer – det kunne være samfundets (dvs. en planmyndigheds) valg af tilstand eller enkelte forbrugeres valg af varebundt.

Valgsituationer er noget fundamentalt i økonomisk teori. Derfor er det vigtigt at finde frem til eventuelle lovmæssigheder i de forskellige valghandlinger.

I dette afsnit vil vi behandle en enkelt agents valg. Det kan være en forholdsvis enkel valgsituation (vor agent har måske købt "en ristet med brød" og skal vælge mellem kombinationerne sennep & ketchup, kun sennep, kun ketchup, ingenting), en mere kompliceret (vor agent læser Mikroøkonomi og skal beslutte, hvor meget arbejde han vil lægge i det) eller en meget kompliceret (som vort senere så prominente eksempel: forbrugerens valg af varebundt i budgetmængden). Afgørende er, at der er visse fællestræk: en mængde af *alternativer,* som der skal vælges imellem, og et *kriterium,* hvorefter agenten træffer sit valg.

2.1.2. Her kunne man indvende, at vi antyder, at vor agent går systematisk til værks. Det gør vi faktisk også – det, vi beskriver, kan passende kaldes teorien for rationelt valg. Det er velkendt, at der er valgsituationer, hvor agenten bliver febrilsk stillet over for de mange alternativer og træffer ud fra alle tænkelige kriterier absurde valg. Men faktisk vil det ofte vise sig, at agenten handlede rimeligt rationelt, når blot man finder det rette kriterium – herom senere.

2.1.3. Oplagt vil konkrete valgsituationer kunne være meget forskellige. Vi vil her blot antage, at der foreligger en *mængde X af alternativer.* Hvor mange elementer X har, er underordnet – blot skal der helst være mindst to forskellige alternativer, ellers er der jo ikke noget at vælge imellem.

Vor agent skal altså vælge et enkelt af X's elementer ud. Vi vil antage, at han vælger det, han synes bedst om. Med andre ord, vi forudsætter, at agenten ordner alternativerne på en eller anden måde og dernæst vælger det alternativ, som er øverst i ordningen.

2.1.4. I de fleste konkrete valgsituationer vil agentens ordning ikke kunne være hvad som helst. I vort eksempel hos pølsemanden vil man sikkert kunne påvise, at der er visse associationer i agentens underbevidsthed forbundet med henholdsvis sennep og ketchup – påvirkninger fra hans barndom, som vil blokere for et helt frit valg. I det mere seriøse eksempel, forbrugerens ordning af varebundter, er det klart, at hans vurdering af varerne har noget at gøre med deres brugsværdi, som er noget samfundsbestemt.

Man vil derfor af og til støde på den indvending, at vor forudsætning: "agenterne har en ordning af alternativerne" skulle være i strid med, at denne ordning i en eller anden forstand er samfundsbestemt. Det er en misforståelse. Vi betragter her kun valghandlingen, givet ordningen. Hvor ordningen kommer fra, er en anden (men naturligvis spændende) historie.

2.1.5. Vor agent har altså en ordning af alternativerne. Vi vil betegne ordningen med $\succsim$, og for to alternativer $x, y \in X$ skriver vi

$$x \succsim y,$$

hvis agenten synes mindst lige så godt om x som om y. I det følgende vil vi kalde $\succsim$ for agentens *præferencerelation* (vor intuitive betegnelse "ordning" er knap så god, idet den matematisk har en lidt anden betydning).

2.1.6.* Præferencerelationen $\succsim$ er et eksempel på det matematiske begreb en *relation* på en mængde (her X). Andre eksempler er relationen $>$ ("større end") på mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal og relationen "går op i" på mængden $\mathbb{Z}$ af hele tal.

Generelt defineres en relation R på en mængde X som en delmængde af mængden $X \times X = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X\}$ af alle par af elementer i X. Hvis der for $z, w \in X$ gælder $(z, w) \in R$, skrives $z\, R\, w$.

2.1.7. Præferencerelationen $\succsim$ vil ofte have visse egenskaber: Med vor fortolkning vil det f.eks. være naturligt at antage, at der gælder $x \succsim x$ for alle $x \in X$ (x er i hvert fald lige så god som sig selv – ellers må der være noget galt med vores agent). Man siger, at $\succsim$ er *reflexiv.*

Lad os lave en liste af egenskaber ved $\succsim$, som vi kan få brug for:

Reflexiv: $\forall x \in X\colon\ x \succsim x.$
Transitiv: $\forall x, y, z \in X\colon\ x \succsim y$ og $y \succsim z$ medfører $x \succsim z.$
Total: $\forall x, y \in X\colon\ x \succsim y$ eller $y \succsim x.$

Hvis $\succsim$ er reflexiv og transitiv, kaldes den en *preordning.* Om agentens præferencerelation er transitiv eller ej, kan vi naturligvis ikke afgøre a priori. Tilsvarende vil præferencerelationen ikke altid være total, der kan findes alternativer, som agenten slet ikke kan sammenligne.

Fra $\succsim$ kan vi konstruere relationerne $\succ$ ("streng præference") ved $x \succ y$ hvis $x \succsim y$ og [ikke $y \succsim x$], og $\sim$ ("indifferens") ved $x \sim y$ hvis $x \succsim y$ og $y \succsim x$. Det er klart, at $\sim$ er reflexiv (hvad med $\succ$?). Hvis $\succsim$ er transitiv, vil $\succ$ være

Acyklisk: $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in X\colon\ x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3, \ldots, x_{n-1} \succ x_n$ medfører [ikke $x_n \succ x_1$].

(Hvis nemlig $x_n \succ x_1$ ville der så meget mere gælde $x_n \succsim x_1$, og da $x_1 \succ x_2$ fås $x_1 \succsim x_2$. Transitiviteten giver $x_n \succsim x_2$. Da $x_2 \succ x_3$, får vi tilsvarende $x_n \succsim x_3$ osv. frem til $x_n \succsim x_{n-1}$. Men da $x_{n-1} \succ x_n$ betyder [ikke $x_n \succsim x_{n-1}$] har vi en modstrid).

2.1.8. Givet X og præferencerelationen $\succsim$ på X søger vi (eller rettere vor agent) et element i X, som er bedst. Hvad vil det sige? I hvert fald må der, hvis $x^0 \in X$ er bedst, gælde, at der ikke er noget $y \in X$ med $y \succ x^0$. I så tilfælde siges x^0 at være *maksimalt* for $\succsim$ (på X).

(Et andet naturligt krav ville være, at $x^0 \succsim y$ for alle $y \in X$. Er dette opfyldt, vil x^0 være maksimalt, for vi kan jo ikke have både $y \succ x^0$ og $x^0 \succsim y$. Men vi kan ikke være sikre på, at et vilkårligt maksimalt x^0 opfylder kravet – medmindre $\succsim$ er total).

2.1.9. Vi har nu alle ingredienserne til en formaliseret teori for valghandlinger. Givet en mængde X af alternativer og en præferencerelation $\succsim$ på X vil agenten vælge et $x^0 \in X$, som er maksimalt for $\succsim$ på X. De spørgsmål, vi søger besvaret i vores teori, er typisk følgende:

Findes der et maksimalt element? (Eksistens)

Findes der mere end ét? (Entydighed)

Hvad sker der med agentens valg, når vi ændrer på de givne betingelser (her X og $\succsim$)? (Komparativ statik).

2.1.10. I vor generelle formulering af valgproblemet kan vi ikke komme langt med disse spørgsmål. Senere vil vi vende tilbage til dem i forskellige specialtilfælde. Det er dog nok værd at give eksistensproblematikken et ord med på vejen.

Hvorfor bekymre sig om eksistens (her af maksimalt element, senere af andre ting)? Vi har lavet en model af et eller andet aspekt af virkeligheden, her en valghandling. I virkeligheden vælger agenten et eller andet – hvorfor så bevise det?

Dette argument er naturligvis en fuser – en sammenblanding af model og virkelighed. Hvis der i vores model ikke findes maksimale elementer, er modellen ikke konsistent som beskrivelse af valghandlingen, og vi må se os om efter en anden model.

2.1.11.* Som et eksempel på situationer, hvor der findes maksimale elementer (og som lidt træning i bevisteknik), har vi følgende resultat:

Hvis mængden X er endelig, og præferencerelationen $\succsim$ er således, at den afledede strenge præference $\succ$ er acyklisk, da findes der et maksimalt element.

BEVIS: Vælg $x_1 \in X$ vilkårligt. Hvis x_1 er maksimalt, er vi færdige. Ellers kan vi vælge et $x_2 \in X$ så $x_2 \succ x_1$. Hvis dette x_2 er maksimalt, er vi færdige. Ellers er der $x_3 \in X$ så $x_3 \succ x_2$. Således fortsættes; da X er endelig, må vi herved enten nå til et x, for hvilket der ikke er noget y med $y \succ x$ (og da er x maksimalt), eller vi får et element, som vi har haft før. Men det strider mod, at $\succ$ er acyklisk. $\square$

2.1.12. I mange tilfælde kan det være ubekvemt at ræsonnere direkte på den givne præferencerelation $\succsim$, hvorimod funktioner er lettere at håndtere. Vi siger, at *præferencerelationen* $\succsim$ *på* X *kan repræsenteres ved en nyttefunktion,* hvis der findes en funktion $S : X \to \mathbb{R}$ (dvs. en funktion fra mængden X af alternativer til de reelle tal) således at for alle $x, y \in X$

$$x \succsim y \;\Leftrightarrow\; S(x) \geq S(y).$$

Det er ikke alle præferencerelationer, der kan repræsenteres ved en nyttefunktion. Hvis S repræsenterer $\succsim$, må $\succsim$ nemlig være en total preordning (vis det!). Hvis der på den anden side findes én funktion S, som repræsenterer $\succsim$, findes der en hel masse: Lad nemlig $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en monotont voksende funktion, dvs. hvis $r_1 > r_2$, da er $\varphi(r_1) > \varphi(r_2)$. Da vil funktionen $\varphi \circ S$ defineret ved $(\varphi \circ S)(x) = \varphi(S(x))$ også repræsentere $\succsim$, idet $x \succsim y \Leftrightarrow S(x) \geq S(y) \Leftrightarrow \varphi(S(x)) \geq \varphi(S(y))$.

Man udtrykker dette ved at sige, at nyttefunktionen S er *ordinal* – de konkrete funktionsværdier af S er ligegyldige; det er kun ordningen af dem, der betyder noget.

2.1.13. Ideen om at repræsentere en præferencerelation ved en nyttefunktion, således at man ved at opgøre nytten af et givet alternativ får en indikation af, hvor "godt" det er for det pågældende individ, kan bruges – og bliver brugt – i mange andre sammenhænge. Faktisk kan man se det som et fællestræk ved de fleste *målinger* – man starter med blot at have en relation (f.eks. "tungere end", "hårdere end", "er et bedre helbred end", defineret på henholdsvis alle fysiske legemer, alle mineraler og alle helbredstilstande), og repræsenterer den så ved en funktion (som det jo så ikke længere er naturligt at kalde en "nytte"funktion).

Lad os se lidt nærmere på et af de mindre trivielle tilfælde af måling, nemlig måling af helbredsstatus, som er blevet udviklet i de senere år i forbindelse med behovet for at opgøre, hvor megen sundhed man får ud af de mange ressourcer, der bruges i sundhedssektoren. Første skridt er at præcisere, hvad man forstår ved helbredstilstande; her vil man som regel benytte en praktisk orienteret definition, idet man ser sundhed som bestående af en række dimensioner og komponenter (evne til at se, at høre, at bevæge sig, at kommunikere med andre osv.), og en sundhedstilstand består så i en vis grad af fuldkommenhed i hver af disse dimensioner. I praksis måles dette ved, at man spørger individet.

Det er imidlertid ikke nemt at håndtere sådanne flerdimensionale sundheds*profiler,* og derfor vil man gerne kunne konstruere et *indeks for sundhedstilstand;* det kan man – som vi har set – hvis individets underliggende ordning af de mulige sundhedstilstande er en total preordning. Men man vil næppe være tilfreds med en hvilken som helst repræsentation, for hele meningen med at konstruere et mål for sundhed er jo, at man vil vurdere, hvor meget man betaler for en given *forskel i sundhedstilstand* forårsaget af en behandling; i sidste ende vil man gerne kunne afgøre, om man får mere sundhed for pengene ved at bruge en krone på hjertetransplantationer end på f.eks. hofteoperationer.

Det betyder i vor terminologi, at nyttedifferenser har mening, altså at vi leder efter en *kardinal* repræsentation. Faktisk kræver man ofte mere endnu, idet man ønsker en repræsentation $U : S \times T \to \mathbb{R}$, hvor S er mængden af sundhedstilstande, $T = [0, \infty[$ tidsaksen, således at "nytten" af at befinde sig i tilstand $s \in S$ i tidsrummet fra 0 til t skal kunne skrives som

$$U(s,t) = Q(s)t,$$

hvor $Q : S \to [0,1]$ er et mål for "sundhedsrelateret livskvalitet". Ved en opgørelse af denne art siges den samlede nytteværdi $U(s,t)$ at være opgjort i QALY ("Quality Adjusted Life Years").

Praktikerne er stadig ikke helt tilfredse, de vil gerne kunne opgøre en gang for alle, hvor mange QALY der fås ud af en krone ved hjertetransplantation, ved blindtarmsoperation osv., og de forestiller sig, at man lægger QALY opnået for de enkelte patienter sammen. Her knækker filmen – i den forstand, at nytter sammenlignes mellem forskellige individer, hvad der ikke rigtig giver mening, medmindre da alle individer er ens.

2.1.14. Inden vi forlader den enkelte agents valgsituation, kan det være på sin plads at overveje, om vi kan tjekke vores model. Vi får jo nok ikke noget ud af at spørge agenten, om han har en pæn preordning eller en nyttefunktion.

Det afgørende er, at vor model – selv uden en konkret specificering af $\succsim$ – giver restriktioner på agentens adfærd, som (i hvert fald i princippet) kan kontrolleres. Hvis nemlig vor agent tér sig som beskrevet ovenfor, kan vi bede ham vælge i forskellige delmængder af X, og der vil da gælde, at hvis $D_1 \subseteq D_2 \subseteq X$ og vor agent ved valget fra D_2 faktisk vælger et element x^0 i D_1, da vil x^0 også være blandt dem, han vil vælge fra D_1 ("hvis verdensmesteren er pakistaner, da er han også Pakistan-mester"). Dette skyldes, at hvis $x^0 \in D_1$ er maksimalt for $\succsim$ på D_2, findes der ikke noget $y \in D_2$ så $y \succ x^0$. Så meget mere findes der ikke noget element $y \in D_1$ så $y \succ x^0$.

Dette resultat er måske ikke særlig ophidsende, men det antyder noget fundamentalt ved vores teori: Ofte vil vi undervejs i vor modelkonstruktion indføre begreber og forudsætninger, som man ikke direkte kan sammenligne med virkeligheden. Dette betyder imidlertid ikke, at teorien ikke kan testes.

2.2. Valgsituationer med flere agenter (samfundsvalg)

2.2.1. Vi vil nu antage, at der er mere end én agent. Som før har vi en mængde X af alternativer, hvorfra der skal vælges.

I vort pølsemandseksempel har vi nu n agenter stående foran pølsevognen (med sædvanlig foragt for realiteter forudsætter vi, at der er plads til dem alle). Der skal vælges blandt de mange måder, hvorpå man kan fordele sennep og ketchup til de n gange én ristet med brød.

Dette problem løses i praksis temmelig simpelt ved, at hver agent får det, han be'r om. Men hvad nu, hvis pølsemanden kræver, at alle skal ha' det samme? Eller hvis det er lige før lukketid, og pølsemanden er ved at udgå for sennep resp. ketchup?

Det er rimeligt at forvente, at agenternes vurderinger af alternativerne ikke er ens (i modsat fald var der ikke noget nyt problem). Ikke alle agenter kan påregne at få deres første ønske opfyldt. De må da enten opgive og gå bort i frustreret tilstand (hvis denne mulighed overhovedet foreligger) eller tilvejebringe et eller andet kompromis. Lad os fordybe os lidt i (dvs. formalisere) denne situation.

2.2.2. I stedet for en enkelt præferencerelation har vi nu en liste af n præferencerelationer $(\succsim_1, \ldots, \succsim_n)$. En sådan liste kaldes en *profil*. Vi kan opfatte en profil som en funktion fra mængden af agenter (som vi vil skrive som $\{1, ..., n\}$) til mængden af præferencerelationer. Værdien af denne funktion på 1 er $\succsim_1$, på 2 er den $\succsim_2$ osv.

2.2.3. Vor kollektive valgsituation er altså karakteriseret ved, at der foreligger en profil, og der skal til denne profil knyttes et bestemt alternativ. En systematisk måde at gøre dette på, dvs. en bestemt forskrift, der til alle relevante profiler knytter et alternativ, vil vi kalde en *samfundsvalgfunktion* (eng. social choice function, kort SCF).

2.2.4. Det er let at finde eksempler på sådanne SCF'er: I pølsevognseksemplet kan vi f.eks. blot lade pølsemanden bestemme. Han beslutter sig måske for at gi' alle sennep & ketchup uanset deres præferencer. Men derved risikerer han naturligvis, at kunderne bliver utilfredse og går til en anden pølsevogn. Dette illustrerer det *første aspekt* af SCF-problematikken: Ikke alle SCF'er er rimelige set fra agenternes synspunkt. Spørgsmålet er da, om der overhovedet findes SCF'er, der opfylder visse rimelighedskriterier. Dette (normative) aspekt vil vi tage op i næste afsnit (2.3).

2.2.5. Et *andet aspekt* kan vi illustrere ved at brodere videre på vort eksempel. Antag at pølsemanden har følgende forskrift: Alle kunderne får det, som har første prioritet hos flest kunder – medmindre blot én har "ingenting" på første plads, i hvilket tilfælde alle får "ingenting".

Hvis nu en af agenterne (lad os sige nr. 1) hader ketchup, således at hans præferencerelation er

$$\text{sennep} \succsim_1 \text{ingenting} \succsim_1 \text{sennep \& ketchup} \succsim_1 \text{ketchup}$$

og han ved, at alle andre agenter helst vil ha' sennep & ketchup, kan han slippe for den forhadte ketchup ved at lade som om, han har "ingenting" på første plads.

Der er sket det, at agent 1 har manipuleret med den givne SCF ved at misrepræsentere sine præferencer. Vort eksempel her var godt nok temmelig søgt, men mere relevante eksempler på denne situation vil dukke op senere (f.eks. i forbindelse med teorien om offentlige goder).

Der er to problemstillinger i denne forbindelse, dels den normative: Kan man konstruere en SCF, som ikke kan manipuleres? (se herom i afsnit (2.3.10)) og dels den deskriptive: Hvilket resultat kan forventes, givet at vor SCF kan manipuleres (for de andre agenter er formodentlig lige så udspekulerede som nr. 1)? Dette fører over i teorien for strategisk adfærd i konfliktsituationer, den såkaldte spilteori (afsnit 2.4).

2.3. Samfundsvelfærdsfunktioner, Arrows umulighedssætning

2.3.1. Det problem, vi skitserede i (2.2.4), nemlig at finde mere eller mindre rimelige SCF'er, er umiddelbart temmelig uoverskueligt, så vi vil simplificere det en smule. I stedet for generelt at betragte funktioner

$$\text{Profiler} \to \text{Alternativer}$$

vil vi kun se på sådanne SCF'er, der kan splittes op i en totrins-procedure

$$\text{Profiler} \to \text{Præferencerelationer} \to \text{ Alternativer}$$

således at forstå, at den foreliggende profil (bestående af n præferencerelationer) først aggregeres til én præferencerelation (fortolket som samfundets vurdering), og at der dernæst vælges et maksimalt element for denne samfunds-præferencerelation (jf. afsnit 2.1).

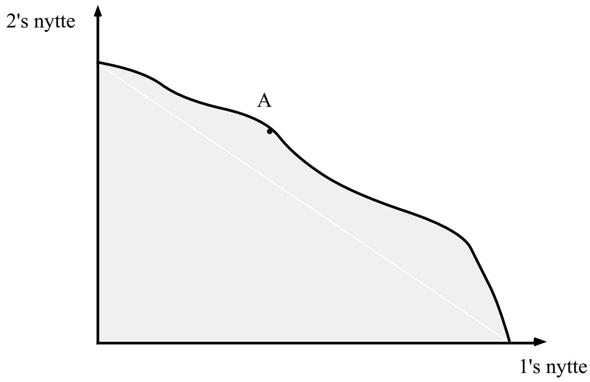
En funktion, der til hver profil giver en præferencerelation på mængden X af alternativer, kaldes en *samfundsvelfærdsfunktion* (eng. social welfare function, kort SWF). Vores opgave er herefter at undersøge, om der findes en nogenlunde rimelig SWF.

2.3.2. Problemet har interesseret både økonomer og filosoffer i århundreder. Således var Condorcet (18. årh.) opmærksom på, at det ikke løses ved for hvert par (x, y) af alternativer at lade agenterne stemme om, hvorvidt samfundet skal foretrække x for y eller y for x . Antag nemlig, at der er tre agenter 1, 2 og 3, tre alternativer x, y og z , og at agenternes præferencerelationer er

$$x \succ_1 y \succ_1 z$$
$$y \succ_2 z \succ_2 x$$
$$z \succ_3 x \succ_3 y$$

Vi får da, at samfundet har $x \succ y$, $y \succ z$ og $z \succ x$, dvs. en cyklisk ordning (samfundet er så at sige inkonsistent).

2.3.3. De engelske grænsenytteteoretikere i slutningen af 1800-tallet (især Marshall og Pigou) havde følgende "løsning" på problemet: antag at præferencerelationerne



Figur 2.1

$\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ i den givne profil kan beskrives ved nyttefunktionerne $S_1, \ldots, S_n$ (se 2.1.12). En oplagt sammenvejning af disse er

$$U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Præferencerelationen beskrevet ved U giver da samfundets vurdering af alternativerne. Denne måde at vælge på kaldes den *utilitaristiske* beslutningsregel.

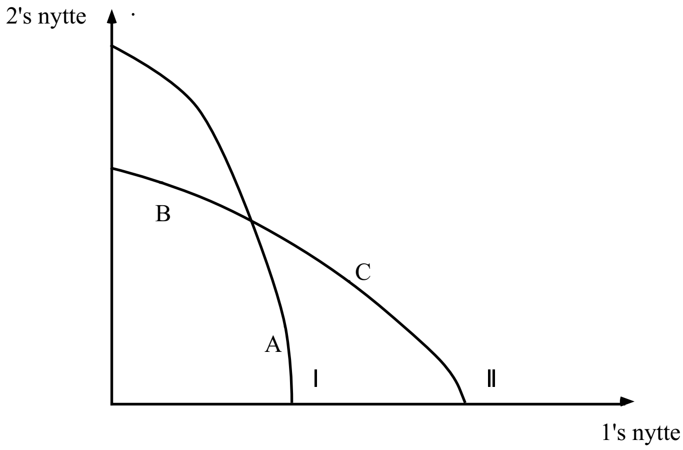
Vanskeligheden ved denne SWF er, at der sker en interpersonal nyttesammenligning. Som vi så i 2.1.12, vil f.eks. funktionen $\tilde{S}_1 = 10^6 S_1$ (værdierne af S_1 bliver ganget med en million) være en lige så god nyttefunktion for agent 1 som S_1. Men bruger vi nu $\tilde{S}_1$ ved sammenvejningen i stedet for S_1, bliver agent 1's vurdering praktisk taget eneafgørende for samfundets valg.

2.3.4. Når den Marshall-Pigou'ske nyttesammenvejning kom i modvind i begyndelsen af 1930'erne efter at have været konventionel visdom i en menneskealder, skyldes det måske, at den i hænderne på en vågen studentergeneration fik uventede politiske implikationer: hvis der nemlig er faldende grænsenytte (en anden del af den konventionelle visdom), vil den rige have mindre nytte af 1 krone end den fattige. Ifølge Marshall og Pigou må samfundets nytte da stige, hvis man tager en krone fra den rige og giver til den fattige.

Resultatet blev som bekendt ikke, at man udjævnede indkomsterne, men at man droppede en uholdbar teori. Historien har en morale – eller muligvis flere – som overlades til læseren.

2.3.5. Det næste, man forsøgte sig med, var de såkaldte kompensationskriterier. De løste heller ikke problemet, men da man stadigvæk kan risikere at støde på dem (f.eks. i udenrigshandelsteorien), giver vi dem en kort omtale.

Lad os tænke os, at samfundet skal vælge mellem en række projekter (det kan være at bygge enten et naturgasnet eller en Storebæltsbro eller en Saltholmlufthavn, eller det kan være et valg mellem autarki, frihandel, toldunioner osv.). Alternativerne er altså disse projekter, som vi vil kalde I, II, III osv.



Figur 2.2

For hvert projekt er der adskillige måder at fordele omkostninger og fordele blandt samfundets borgere (agenterne). Antages deres præferencerelationer beskrevet ved nyttefunktioner, kan vi i det simple tilfælde med kun to agenter for hvert projekt indtegne et nyttemulighedsområde, der viser de nyttekombinationer, som kan opnås ved det givne projekt. Et enkelt af disse (i Figur 2.1 punktet A) er det, som faktisk vil indtræffe, de øvrige er hypotetiske.

*Kaldor*s kriterium siger nu, at projekt II er bedre end projekt I, hvis vinderne kan bestikke taberne. I Figur 2.2 fører projekt II til punktet B. Agent 2 er blevet bedre stillet, agent 1 ringere stillet end i punktet A. Men man kunne under projekt II have valgt punktet C, hvor begges nytte er større end i A. Altså er II bedre end I.

Man vil bemærke, at efter samme kriterium er I også bedre end II (taberne kan også bestikke vinderne). Det vil naturligvis ikke altid gælde, men alene forekomsten af en sådan inkonsistens må rokke tilliden til Kaldor-kriteriet.

Hicks' kriterium: Taberne kan ikke bestikke vinderne, kan resultere i samme slags problemer, og heller ikke *Scitovsky's* kriterium: Vinderne kan bestikke taberne og taberne kan ikke bestikke vinderne, sikrer os mod inkonsistenser. Et eksempel er vist i Figur 2.3. Vi har fire projekter. Man kan tjekke, at I er bedre end II (ifølge S-kriteriet), II bedre end III, III bedre end IV og IV bedre end I.

2.3.6. I vor kronologiske gennemgang er vi nu nået frem til 1950'erne. Det er stadig ikke lykkedes at finde en fornuftig SWF.

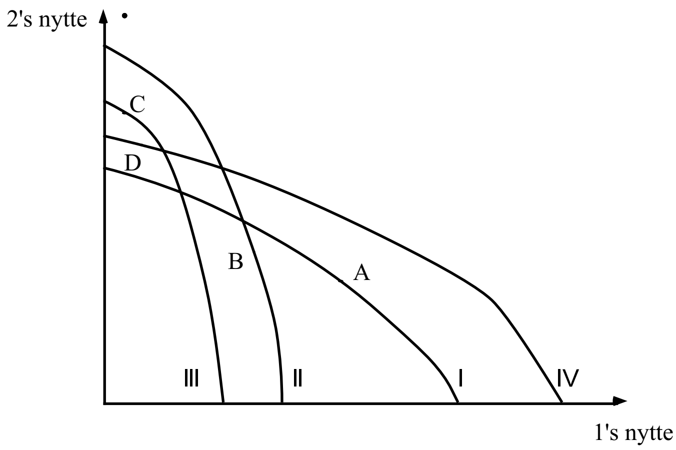
Men hvad er overhovedet en "fornuftig" SWF? Lad os præcisere, hvilke krav vi vil stille til aggregeringsproceduren, nemlig følgende:

(1) Uindskrænket domæne: Proceduren skal kunne virke på alle profiler $(\precsim_1, \ldots, \precsim_n)$, hvor hver enkelt $\precsim_i$ er en total preordning (se (2.1.7)).

(2) Resultatet af proceduren skal være en total preordning.

(3) Pareto-kriteriet: Hvis der for en profil $(\precsim_1, \ldots, \precsim_n)$ og to alternativer $x, y \in X$ gælder $x \succ_i y$ for alle i, da skal samfundet have $x \succ y$.

(4) Binaritet: Hvis der for to profiler $(\precsim_1, \ldots, \precsim_n)$ og $(\precsim'_1, \ldots, \precsim'_n)$ og to



Figur 2.3

alternativer $x, y \in X$ gælder

$$x \succ_i y \Leftrightarrow x \succ_i' y \text{ og } y \succ_i x \Leftrightarrow y \succ_i' x$$

for alle i (dvs. agenternes vurdering af x over for y er den samme i de to profiler), og $\succsim$ resp. $\succsim'$ er resultatet ved vor SWF af de to profiler, da skal der gælde

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succ' y \text{ og } y \succ x \Leftrightarrow y \succ' x.$$

Dette betyder, at samfundets vurdering af x over for y kun afhænger af agenternes vurdering af x og y, men altså ikke af f.eks. hvordan w, z osv. vurderes. Forudsætningen kaldes derfor også "Uafhængighed af irrelevante alternativer".

(5) Ingen diktator: Der må ikke være en agent i, således at der for alle profiler $(\succsim_1, \ldots, \succsim_n)$ og alternativer $x, y \in X$ gælder, at samfundet har $x \succ y$, hvis agent i har $x \succ_i y$.

2.3.7. Af disse krav til vor SWF er de fleste af en sådan karakter, at en overtrædelse af dem må anses for urimelig. Mest tvivlsom er nok (4). Et noget outreret eksempel er følgende:

Antag i vort efterhånden noget forslidte pølsevognseksempel at alternativerne x, y og z står for henholdsvis "alle får sennep & ketchup", "alle får ingenting" og "alle bliver skudt". Hvis nu agent nr. 1 (ketchup-haderen) har ordningen $y \succ_1 z \succ_1 x$ og de øvrige har $x \succ_i y \succ_i z$, kan man godt argumentere for, at x er så katastrofalt for visse af samfundets borgere, at samfundet ikke med rimelighed kan foretrække x for y, hvorimod det samme argument ikke ville gælde, hvis profilen var $y \succ_1 x \succ_1 z$ og $x \succ_i y \succ_i z$, $i = 2, .., n$. Her har z's placering altså betydning for samfundets vurdering af x over for y.

2.3.8. Hvorom alting er, givet vore forudsætninger (1) - (5) i (2.3.6) får vi sat en stopper for vor søgeproces, idet der gælder følgende vigtige resultat:

> *Arrow's umulighedssætning: Hvis X indeholder mindst 3 forskellige alternativer, da findes der ikke nogen SWF, der opfylder (1)-(5) i (2.3.6).*

Der findes altså ikke nogen a priori rigtig måde at aggregere præferencerelationer på. Dermed er det naturligvis ikke sagt, at "man" ikke kan sammenveje agenters vurderinger – det sker hver eneste dag på den ene eller anden måde. Der er blot ikke nogen teoretisk "rigtig" måde at gøre det på.

2.3.9.* I beviset for sætningen antager man, at en given SWF opfylder (1) - (4). Det er ikke en tom antagelse - en diktatorisk SWF vil f.eks. opfylde (1) - (4). Man viser så, at den givne SWF må være diktatorisk. For at illustrere fremgangsmåden vil vi vise sætningen for $n = 2$.

BEVIS ($n = 2$): Vi vil kalde en agent for *bestemmende* (eng. decisive) *for* x *over* y, hvis der for enhver profil, hvor han har $x \succ y$ og den anden $y \succ x$, gælder, at samfundet har $x \succ y$. Bemærk, at på grund af foruds. (4) behøver det blot at gælde for en enkelt profil.

1. skridt: Der findes en agent, som er bestemmende for et vist alternativ over et andet: Antag, at der for en vis profil $(\succsim_1, \succsim_2)$ gælder $x \succ_1 y$, $y \succ_2 x$. Hvis samfundet har $x \succ y$ ($y \succ x$), er agent 1 (2) bestemmende for x over y (y over x) . Hvis samfundet har $x \sim y$, ser vi på profilen

$$x \succ_1 y \succ_1 z$$
$$y \succ_2 z \succ_2 x.$$

Vi ved, at samfundet har $x \sim y$ (foruds. (4)). Det har også $y \succ z$ (foruds. (3)). Altså er $x \succ z$ (foruds. (2)). Men så er agent 1 bestemmende for x over z.

2. skridt: Givet, at en agent (f.eks. nr. 1) er bestemmende for f.eks. x over y, har vi ham mistænkt for at være diktator. Han er i hvert fald bestemmende for x over et vilkårligt tredje alternativ w. Betragt nemlig profilen

$$x \succ_1 y \succ_1 w$$
$$y \succ_2 w \succ_2 x.$$

Her har samfundet $x \succ y$ (idet 1 er bestemmende) og $y \succ w$ (foruds. (3)), altså $x \succ w$ (foruds. (2)). Heraf fås, at 1 er bestemmende for x over w.

Han er også bestemmende for y over w: Betragt profilen

$$y \succ_1 x \succ_1 w$$
$$w \succ_2 y \succ_2 x.$$

Samfundet har $x \succ w$ (1 er bestemmende), $y \succ x$ (3), altså $y \succ w$, dvs. 1 er bestemmende for y over w.

3. skridt: Vi har set, at hvis agent 1 er bestemmende for x over y, da er han bestemmende for såvel x som y over et vilkårligt tredje alternativ. Han er derfor bestemmende for vilkårlige par af alternativer.

4. skridt: Vi har nu vist, at hvis der for vilkårlige x og y gælder $x \succ_1 y$ og $y \succ_2 x$, da har samfundet $x \succ y$. Hvis der gælder $x \succ_1 y$ og $y \sim_2 x$, kan vi betragte profilen

$$x \succ_1 w \succ_1 y$$
$$w \succ_2 y \sim_2 x.$$

Her har samfundet $x \succ w$ (1 er bestemmende) og $w \succ y$ (3), altså $x \succ y$. Dermed har vi vist, at agent 1 er diktator. □

(Beviset for $n > 2$ er lidt mere besværligt, idet man må betragte bestemmende koalitioner af agenter. Det skal vi ikke komme ind på).

2.3.10. Arrows sætning kan vises at have implikationer også for andre af de problemer, vi har beskæftiget os med. I afsnit (2.2.5) bemærkede vi, at en given SCF (en samfunds-valg-funktion fra profiler til alternativer) ofte måtte forventes at kunne manipuleres. Hvad betyder her “ofte”? Uden bevis vil vi nævne følgende resultat, der skyldes Gibbard (1973) og Satterthwaite (1975):

Antag at en given SCF ikke kan manipuleres, og at mængden af alternativer, som kan blive valgt ud, har mindst 3 elementer. Da er den givne SCF diktatorisk, dvs. der findes en agent i, således at der for enhver profil $(\succsim_1, \dots, \succsim_n)$ gælder, at hvis samfundet vælger x, da er der ikke noget y, så at $y \succ_i x$.

2.4. Lidt om spilteori

2.4.1. Lad os starte med et eksempel fra dagliglivet – noget man kan foretage sig under kedelige forelæsninger:

To spillere (1 og 2) viser samtidig én eller to fingre. Hvis antallet af fingre er lige, betaler 1 en krone til 2. Hvis ulige, betaler 2 en krone til 1. (Man kan også vise plat eller krone af hver sin mønt – derfor går spillet under betegnelsen “matching pennies”). Vi kan illustrere dette spil i følgende skema:

		2’s strategi	
		1 finger	2 fingre
1’s strategi	1 finger	-1	1
	2 fingre	1	-1

Spillernes valg kaldes strategier. I skemaet har vi for hvert par af strategier skrevet 1’s gevinst. Dermed har vi også 2’s gevinst, som jo i dette spil er lig $-$ 1’s gevinst. Man kalder sådanne spil for 2 personers nulsumsspil.

2.4.2. I eksemplet ovenfor var der 2 spillere og 2 strategier for hver spiller. Et eksempel med mere end 2 strategier er følgende:

		2’s strategi		
		Papir	Sten	Saks
1’s strategi	Papir	0	1	-1
	Sten	-1	0	1
	Saks	1	-1	0

Der kan også være uendelig mange strategier som i følgende eksempel: Spiller 1 og 2 nævner samtidig et tal. Den, som har nævnt det største tal, får en krone af den anden.

2.4.3. Typisk for vore eksempler er følgende: Der er et antal *spillere* (indtil videre 2); hver spiller har visse *strategier.* Endelig er der til hvert simultant strategivalg specificeret en *gevinst* (eng. pay-off) til hver spiller (i vore eksempler med den yderligere egenskab, at summen af spillernes gevinster er 0). Et spil givet på denne måde ved specificering af strategier og gevinst siges at være givet på *normalform.*

Vore eksempler var godt nok temmelig primitive spil. I mere komplicerede spil (ludo, whist, skak) har hver spiller flere træk, og der kan være stokastiske elementer (terningkast, blanding af kort). Sådanne spil kan imidlertid også skrives op på normalform, omend det er noget besværligt.

På den anden side kan man lave nye spil, som ikke nødvendigvis har nogen pendant fra dagliglivet, ved at specificere antallet af strategier og gevinsten i skemaer (matricer) som ovenfor. Det vil vi benytte os af til at få nogle principielle træk frem.

2.4.4. Lad os betragte følgende 2 personers nulsumsspil:

		2’s strategier			
		I	II	III	IV
	1	7	-3	-3	4
1’s strategier	2	1	-8	6	-3
	3	-1	-2	-1	5

hvor vi har betegnet l’s strategier med 1, 2 og 3, og 2’s strategier med I, II, III og IV.

Hvilken strategi skal 1 vælge? Hans gevinst kan maksimalt blive 7, nemlig ved strategierne $(1, \mathrm{I})$. Men han kan jo ikke regne med, at 2 vil vælge I. Hvis nemlig spiller 2 skal vælge den strategi, som giver ham størst gevinst, vælger han ikke I.

Når nu spiller 1 først har indset, at han må regne med den anden spiller, kan han gennemgå sine strategier for at se, hvad resultatet kan blive, givet at spiller 2 vælger det for ham mest ufordelagtige. Denne såkaldt garanterede gevinst er for strategi 1 -3, for strategi 2 er den -8, og for 3 er den -2. Vor forsigtige spiller kan da vælge den strategi, som maksimerer den garanterede gevinst (det er her 3), den såkaldte *maximin*-strategi.

På samme måde kan spiller 2 for hver af sine strategier finde garanteret gevinst (sæt minus foran det største tal i søjlen) og derpå maksimere. Dette kaldes *minimax*-strategien for spiller 2.

2.4.5. I vort eksempel fører disse overvejelser til, at 1 vælger strategi 3, 2 vælger strategi II. Dette strategivalg har yderligere den egenskab at være en

> *Nash-ligevægt: Der er ingen spiller, som givet den anden spillers valg kan forbedre sin gevinst ved at vælge en anden strategi.*

(Hvis spiller 2 har valgt II, vil strategierne 1 og 2 være ringere for spiller 1 end strategi 3, tilsvarende for spiller 2). Strategikombinationen $(3, \mathrm{II})$ er altså i en vis forstand stabil: selvom den ene spiller kender den andens valg, vil han ikke ændre sin strategi. Det forekommer rimeligt at kræve denne egenskab opfyldt for det endelige strategivalg af spillerne – dvs. at søge "løsninger" til spillet blandt Nash-ligevægtene.

2.4.6. Det er ikke i alle spil, at der findes Nash-ligevægte, således f.eks. ikke i vort første eksempel (2.4.1). Hvad er da en løsning til dette spil?

Her kan vi tage intuitionen til hjælp. For hver spiller er det vigtigt, at den anden ikke får mistanke om, hvilken strategi man har bestemt sig for. Dette opnås enten ved at anlægge et passende pokerfjæs eller, hvis spillet gentages nogle gange, at sørge for at skifte mellem strategierne.

Formelt kan dette fås frem ved at indføre blandede strategier. En *blandet strategi* for spiller 1 (i eks. 2.4.1) foreskriver, at han skal vælge "1 finger" med en vis sandsynlighed p, "2 fingre" med sandsynligheden $1 - p$. Gevinsten bliver da (hvis f.eks. spiller 2 vælger "1 finger") middelværdien af gevinsterne ved de oprindelige ("rene") strategier (dvs. $p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 1$).

Man kan tjekke, at i eksempel (2.4.1) er det strategivalg, hvor hver spiller vælger den blandede strategi $(1/2, 1/2)$, en Nash-ligevægt. Der gælder faktisk følgende fundamentale sætning (v. Neumann & Morgenstern, 1944):

> *Ethvert to-personers nulsumsspil, hvor begge spillere har et endeligt antal rene strategier, har en Nash-ligevægt i blandede strategier.*

2.4.7. Som nævnt behøvede vi i nulsumsspillene ikke at skrive spiller 2's gevinst i matricen – idet den jo altid er minus spiller 1's gevinst. Men er spillet ikke et nulsumsspil, må vi have begges gevinster med.

Eksempel: “Kønnenes kamp”:

		2’s strategier	
		1	2
1’s	1	$(2, 1)$	$(0, 0)$
strategier	2	$(0, 0)$	$(1, 2)$

Spiller 1 og 2 er henholdsvis mand og kone. Strategi 1 og 2 står for at gå henholdsvis til fodboldkamp og i operaen. Med traditionelt kønsrollemønster foretrækker manden fodbold, kvinden opera – men begge foretrækker at gå sammen frem for hver for sig. Det er klart, at såvel strategivalget $(1, 1)$ som $(2, 2)$ er Nash-ligevægte.

2.4.8. I visse situationer er Nash-ligevægtene dog mindre oplagte som intuitivt løsningsbegreb.

Eksempel: “Fangens dilemma”:

		2’s strategier	
		1	2
1’s	1	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
strategier	2	$(0, -10)$	$(-9, -9)$

Spiller 1 og 2 er anholdte, mistænkt for i fællesskab at have begået en større forbrydelse. Hver af dem har mulighed for at tilstå (strategi 2) eller lade være (strategi 1). Anklageren har lovet hver af spillerne, at hvis han tilstår, slipper han for straf ved at vidne mod den anden, der så får den strengeste straf (10 år). Hvis den anden også tilstår, vil begge blive straffet, dog med en vis reduktion for tilståelse (9 år). Hvis ingen tilstår, finder han en mindre forseelse at hænge dem begge op på (1 år).

Der er én Nash-ligevægt, nemlig $(2, 2)$. Denne løsning er, i hvert fald for spillerne, temmelig ubehagelig. $(1, 1)$ havde været langt bedre – men den er ikke stabil. For at sikre denne strategikombination måtte man have en eller anden form for aftale – men det har vi udelukket, spillet er ikke-kooperativt.

2.4.9. Hvis der er mere end 2 spillere, kan vi ikke længere skrive gevinstmatricen op, men vort begrebsapparat kan stadig benyttes.

Generelt er et *n-personers ikke-kooperativt spil på normalform* defineret ved

– en endelig mængde af spillere $\{1, ..., n\}$,
– for hver spiller i, en strategimængde Σ_i,
– en gevinstfunktion $f : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$,

således at for en liste $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ af strategivalg for hver spiller (dvs. $\sigma_i \in \Sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$) er $f_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ (i’te koordinat) den gevinst, spiller i får ved dette strategivalg.

Spillet er altså defineret ved n, Σ_i'erne og f. Vi kan understrege det ved at skrive det givne spil som $\mathcal{S} = ((\Sigma_i)_{i=1}^n, f)$.

En *Nash-ligevægt* for spillet $\mathcal{S}$ er en liste $(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0)$ af strategier, således at der for alle i gælder

$$f_i(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_n^0) \geq f_i(\sigma_1^0, \ldots, \sigma_{i-1}^0, \sigma_i, \sigma_{i+1}^0, \ldots, \sigma_n^0), \text{ alle } \sigma_i \in \Sigma_i.$$

2.4.10. Ét er, at vore begreber kan overføres til situationen $n > 2$. Noget andet er, at der kommer et nyt aspekt ind, så snart der er 3 spillere: To af dem kan danne en koalition og spille i fællesskab mod den tredje. Dette fører over i teorien for *kooperative spil*, som vi ikke skal gå nærmere ind på her.

2.5. Noter

2.5.1. Præferencer og nyttefunktioner har indtaget en central plads i mikroteorien i over hundrede år. En historisk oversigt findes f.eks. i Stigler (1950). For en letlæselig, historisk orienteret fremstilling af dette og andre af kapitlets emner henvises til Walsh (1970), hvoraf bl.a. gennemgangen i afsnit 2.3 er inspireret.

2.5.2. Diskussionen af samfundsvalg er af central betydning både for den økonomiske teori og for en række anvendelser, f.eks. i international økonomi og cost-benefit-analyse.

Arrows umulighedssætning fremkom i Arrow (1951). Af senere værker kan nævnes Sen (1972) og Fishburn (1973). Sætning 2.3.10 blev fundet uafhængigt af Gibbard (1973) og Satterthwaite (1975).

2.5.3. Spilteorien blev grundlagt af von Neumann og Morgenstern (1944). En god introduktion til spilteorien er Luce og Raiffa (1957). En moderne (men ikke elementær) fremstilling findes i Rosenmüller (1981).

2.6. Opgaver

2.6.1. Undersøg om følgende præferencerelationer er totale preordninger:

(i) Vektorordningen $\geq$ på $\mathbb{R}^l$ (givet ved $x \geq y$ hvis $x_h \geq y_h$ for alle h),

(ii) Relationen "går op i" defineret på alle hele tal,

(iii) Relationen "længere fra 0 end" defineret på $\mathbb{R}$.

2.6.2. Find en nytterepræsentation af præferencerelationen $\precsim$ hvis indifferenskurver er rette linjer med hældning -2.

2.6.3. Det såkaldte *Rawls'ske maximin-kriterie* tilsiger, at samfundet bør vælge således, at den dårligst stillede får det så godt som muligt.

Vis hvorledes dette afbildes i et nyttemulighedsområde, og giv et eksempel på et nyttemulighedsområde, hvor den utilitaristiske regel (se 2.3.3) og maximin-reglen giver forskelligt resultat.

2.6.4. En *scorings-regel* til samfundsvalg virker ved, at hvert individ kan tildele bestemte point til 1. pladser, 2. pladser osv., hvorefter det alternativ, der har opnået flest point, vælges. Det simpleste eksempel er *flertals-reglen,* hvor 1. plads får 1 point og ingen andre pladser får point.

Giv et eksempel på, at scorings-regler kan manipuleres, dvs. et individ vil i en passende situation kunne opnå noget bedre ved at angive en anden præference end sin rigtige.

2.6.5.* Det såkaldte "no-show-paradox" drejer sig om valgsituationer, hvor en vælger ved at blive hjemme i stedet for at afgive sin stemme opnår, at det endelige resultat bliver bedre i henhold til hans præferencer.

Konstruér et eksempel på en sådan situation.

2.6.6. En *forhandlingsløsning* giver til hvert nyttemulighedsområde (se Figur 2.1) et bestemt punkt, der kan opfattes som et kompromis mellem de forskellige interesser, som er illustreret ved dette nyttemulighedsområde. Specielt er *Nash's forhandlingsløsning* givet som det punkt, der maksimerer produktet af individernes nytte.

Vis, at Nash's forhandlingsløsning opfylder *uafhængighed af irrelevante alternativer:* Hvis der for to nyttemulighedsområder gælder, at det første er indeholdt i det andet, og løsningen til område II udpeger et punkt, der ligger i område I, da er dette punkt også løsningen i område I.

2.6.7.* Betragt et to-personers spil, hvor spiller 1 kun har to rene strategier I og II til rådighed (mens spiller 2 kan have et vilkårligt antal); i så fald er enhver blandet strategi for spiller 1 givet ved sandsynligheden p for at strategi I vælges. Forklar, at for hver af spiller 2's rene strategier er spiller 2's gennemsnitlige gevinst som funktion af p en ret linje, hvor værdien i henholdsvis $p = 0$ og $p = 1$ er payoff ved henholdvis den rene strategi II og den rene strategi I for spiller 1.

Brug dette til at udvikle en grafisk metode til at finde Nash-ligevægt i blandede strategier i spil, hvor den ene part kun har to rene strategier.

3. Forbrugeren

3.1. Forbrugsmulighedsområdet

3.1.1. Vi vil nu gå i gang med den detaljerede beskrivelse af de forskellige typer af agenter og starter med forbrugerne. Vort formål er at studere de aspekter af forbrugerens handlinger, som er af betydning, når vi senere skal studere økonomier med flere forbrugere og eventuelt andre agenter. Derimod sigter vi ikke mod at dække alle teorier for forbrugeradfærd.

3.1.2. Forbrugerens rolle i vore modeller er oplagt – han skal gennemføre et vist forbrug. Men hvad er så et forbrug? I nationalregnskabet kan man læse, at det samlede forbrug er så og så mange milliarder kroner – eller man har måske hørt om en vis "fundamental psykologisk lov", gående ud på, at folk forbruger en bestemt del af indkomsten (faldende med voksende indkomst).

Vi er nødt til at være lidt mere omhyggelige med sprogbrugen. Ikke fordi vi er spidsfindige og hentyder til, at de færreste sætter indkomsten til livs i dens oprindelige form, men fordi det er et af vore formål at studere prissystemet, og dette er rodet håbløst ind i begrebet forbrug, således som dette er anvendt ovenfor.

Til vort formål er et *forbrug* et varebundt (jf. 1.3.4)

$$x = (x_1, \ldots, x_l),$$

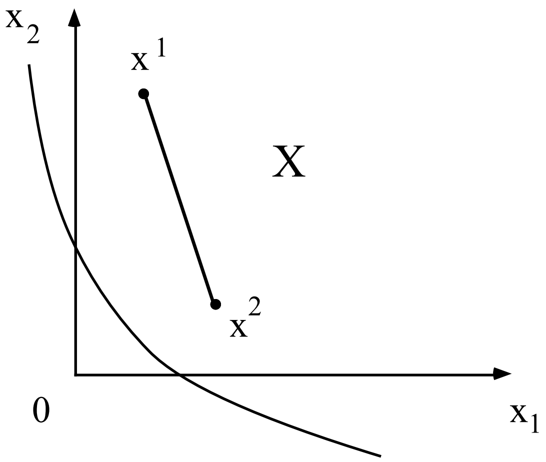
hvor den h'te koordinat angiver, hvor meget der stilles vor forbruger til rådighed af vare nr. h.

3.1.3. Det er imidlertid ikke ethvert varebundt, der kan komme på tale som forbrug. Hvordan skal vi f.eks. fortolke eventuelle negative koordinater af x? Det kan være rimeligt at opfatte en vis mængde arbejdskraft, ydet af vor forbruger, som et negativt forbrug af denne vare. Men hvad med negativt forbrug af spegepølse?

Ud fra sådanne overvejelser vil vi derfor indføre *forbrugsmulighedsområdet* X som mængden af alle de varebundter, der kan være forbrug. X er altså en delmængde af $\mathbb{R}^l$. Et element $x \in X$ kaldes et *muligt* forbrug.

3.1.4. Vi vil senere få brug for visse egenskaber ved X, som vi derfor opregner her som

FORUDSÆTNING F1: *Om forbrugsmulighedsområdet X gælder:*
- *(a) X er ikke tom,*
- *(b) X er afsluttet,*
- *(c) X er konveks,*



Figur 3.1

(d) *X er nedadtil begrænset,*

(e) *Hvis $x^1 \in X$ og $x^2 \in \mathbb{R}^l$ er således, at $x_h^2 \geq x_h^1$ for alle h, da er $x^2 \in X$.*

3.1.5. For at kunne vurdere betydningen af F1 for fortolkningen af modellen vil vi kigge nærmere på de enkelte punkter:

(a) er et temmelig oplagt krav, som næppe behøver kommentar.

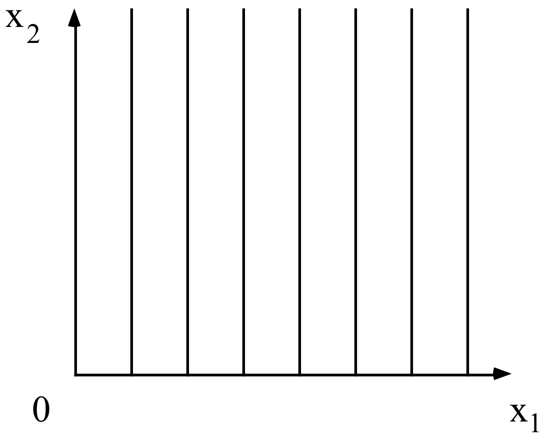
(b) X afsluttet betyder, at tager vi en følge $x^1, x^2, x^3, \ldots$ af elementer fra X, som går mod et vist x, så skal dette x også tilhøre X. Dette er en "teknisk" forudsætning, som ikke kan af- eller bekræftes empirisk, idet vi da skulle have uendelig mange observationer (nemlig en følge).

(c) X konveks betyder at hvis $x^1, x^2 \in X$ og λ er et reelt tal mellem 0 og 1 (dvs. $0 \leq \lambda \leq 1$), da gælder $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$. Geometrisk betyder dette, at for hvert par x^1 og x^2 af punkter fra X skal hele linjestykket mellem x^1 og x^2 (dette linjestykke skrives ofte som $[x^1, x^2]$) være indeholdt i X, jf. Figur 3.1.

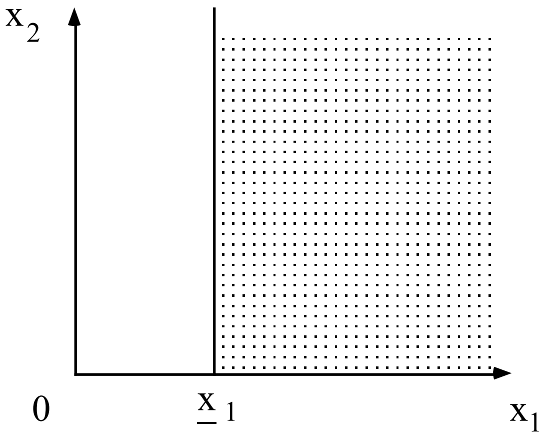
Er denne antagelse om konveksitet af forbrugsmulighedsområdet rimelig? Den må jo f.eks. føre til, at hvis vor forbruger alternativt kan forbruge 10 cigaretter samt 1 bil eller 0 cigaretter og 2 biler, da er også 10/7 cigaretter og 13/7 bil et muligt forbrug. Eller: Vor forbruger kan forbruge 1 skopudsning (hvorved vel må forstås, at begge sko bliver pudset) eller ingen skopudsning, men hvad med 1/3 skopudsning?

Disse eksempler ses at referere til, at visse varer ikke er vilkårligt delelige. Hvis man vil tage højde for udeleligheder i forbruget af visse varer, kan (c) ikke opretholdes. Forbrugsmulighedsområdet kommer da til at se ud f.eks. som vist i Figur 3.2. Her er vare 2 delelig, mens vare 1 skal forbruges i bestemte enheder. Sådanne forbrugsmulighedsområder vil vise sig at være ret uhåndterlige til vore formål. Og eftersom de mindste enheder, hvori de forskellige varer kan deles, som oftest er små, vil vi opfatte (c) som en acceptabel tilnærmelse.

3.1.6. Der er også andre situationer, hvor antagelse (c) kan give problemer. Antag f.eks., at vor forbruger alternativt kan forbruge 2 engelske bøffer i København og



Figur 3.2



Figur 3.3

i Odense (dette er jo to forskellige varer, jf. 1.3.7). Det er ikke oplagt, at han også kan forbruge en engelsk bøf i København og én i Odense på samme tid. I dette eksempel opstår konflikten med (c) ved en strikt fortolkning af ordet forbrug. Det skal i bogstavelig forstand fortæres af forbrugeren. Hvis vi som forbrug inkluderer, at vor forbruger eventuelt lader den ene bøf gå i skraldebøtten (formodentlig ved telefonisk instruktion), kan vi også betragte det sidste forbrug i eksemplet som muligt.

Et andet – mere hårdkogt – eksempel på, at en tilpas bred fortolkning af forbrug kan redde antagelse (c), er følgende: Vor forbruger er en kuli, varerne er ris i dag og ris i morgen. Kulien skal have et vist minimum $\underline{x}_1$ af ris i dag for overhovedet at overleve til i morgen. De mulige forbrug er da (se Figur 3.3) det prikkede område samt linjestykket $[0, \underline{x}_1]$.

Antagelse (c) kan reddes, hvis vi også opfatter varebundter (x_1, x_2), hvor $0 \leq x_1 < \underline{x}_1$ og $x_2 \geq 0$ som mulige forbrug: forbrugeren får x_1 i dag, hvorefter x_2 leveres i morgen til hendes adresse (uanset at hun ikke har fornøjelse af det). Den socialt indignerede læser kan vi (forsøge at) berolige med, at vi ikke helt har glemt de konsekvenser, sådanne "mulige" forbrug har for vor forbruger. Det kommer ind gennem hendes præferencerelation (se (3.2)).

3.1.7. Antagelse (d) om, at forbrugsmulighedsområdet er nedadtil begrænset, betyder, at der skal findes en vektor $b \in \mathbb{R}^l$ (som ikke nødvendigvis tilhører X), således at der for alle $x \in X$ gælder $x_h \geq b_h$, $h = 1, \ldots, l$. Hvis en koordinat af b er 0 eller positiv, betyder det, at negativt forbrug af den pågældende vare ikke kan optræde. Hvis negativt forbrug har mening, således som før nævnt for ydelse af forskellige typer arbejdskraft, indebærer vor antagelse, at der er grænser for, hvor meget forbrugeren kan yde.

Endelig har forudsætning (e) den konsekvens, at for ethvert muligt forbrug $x \in X$ vil et varebundt, som giver mindst lige så meget af alle varer (eller kræver mindre ydet arbejdskraft), også være et muligt forbrug. Med en snæver fortolkning af forbrug kan der være problemer, idet der er grænser for, hvor store varemængder forbrugeren kan sætte til livs. Opfattes derimod forbrug bredt, så at det indeholder at smide væk, er (e) ret uproblematisk.

3.1.8. Når diskussionen af F1 har været så detaljeret, skyldes det ikke, at F1 som helhed er betænkelig. Det er faktisk en temmelig uskyldig forudsætning (i hvert fald sammenlignet med, hvad vi senere må antage). Formålet har været at illustrere de overvejelser, man bør gøre sig, hver gang en forudsætning introduceres. I det følgende vil vi overlade en stadig større del heraf til læseren.

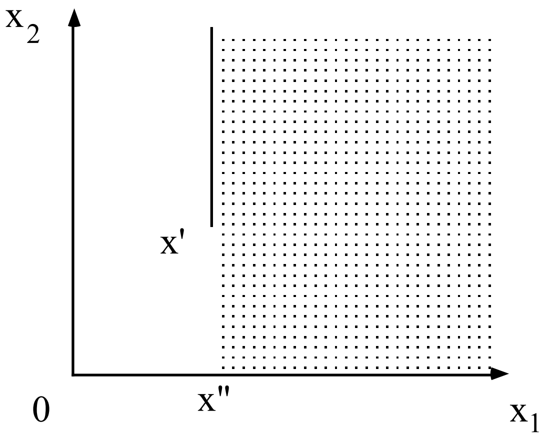
3.2. Nyttefunktionen

3.2.1. Det er jo rimeligt at antage, at vor forbruger ikke er ligeglad med, hvilket blandt de mulige forbrug, der faktisk gennemføres. Fra det foregående ved vi, at den oplagte formalisering heraf er at antage, at forbrugeren har en præferencerelation $\succsim$ på X.

Vi vil i alt det følgende antage, at $\succsim$ kan repræsenteres ved en nyttefunktion (jf. 2.1.12). Det vil senere vise sig at være vigtigt, at funktionen S, som repræsenterer $\succsim$, er kontinuert. Vi vil derfor eksplicit antage, at

> *forbrugerens præferencerelation kan repræsenteres ved en kontinuert nyttefunktion.*

Når S er kontinuert, må der for ethvert reelt tal r gælde, at mængderne $\{x \in X \mid S(x) \geq r\}$ og $\{x \in X \mid S(x) \leq r\}$ er afsluttede. For $r = S(x')$ får vi, at $\{x \in X \mid x \succsim x'\}$ og $\{x \in X | x' \succsim x\}$ er afsluttede for ethvert $x' \in X$. Når denne betingelse er opfyldt, siges $\succsim$ at være kontinuert. Sammenholdt med (2.1.12) har vi, at $\succsim$ er en kontinuert total preordning. Uden bevis vil vi nævne følgende sætning:



Figur 3.4

Hvis X opfylder F1, kan $\succsim$ repræsenteres ved en kontinuert nyttefunktion netop hvis $\succsim$ er en kontinuert total preordning.

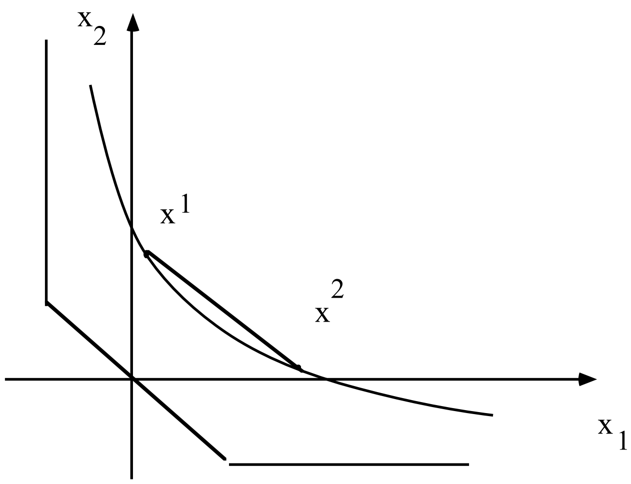
3.2.2. Standardeksemplet på en total preordning, som ikke er kontinuert, er den lexicografiske ordning; lad $X = \mathbb{R}^2_+$ $(= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\})$ og lad relationen L være bestemt ved, at $x^1 \, L \, x^2$ hvis enten $x^1_1 > x^2_1$ eller $x^1_1 = x^2_1$ og $x^1_2 \geq x^2_2$. Fortolkningen af L er, at forbrugeren anser vare 1 for så væsentlig, at han for at vurdere to varebundter x^1 og x^2 kun ser på anden koordinat (vare 2), hvis den første (vare 1) er identisk i de to varebundter.

Det er let at se, at L er en total preordning. For at se, at L ikke er kontinuert, vælges et punkt $x' \in \mathbb{R}^2_+$ med begge koordinater positive. Mængden $\{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \, L \, x'\}$ består af det prikkede område og halvlinjen over x', men linjestykket $(x', x"]$ (åbent i den ene ende, afsluttet i den anden, se Figur 3.4) er ikke med, så mængden er ikke afsluttet.

3.2.3. Begrebet nyttefunktion var tidligere behæftet med en del mystik, idet man ikke uberettiget henviste til, at virkelighedens forbrugere åbenbart ikke er bevidste om, at de er udstyret med en nyttefunktion. Som vi har set, er nyttefunktionen blot et analytisk hjælpemiddel, der beskriver forbrugerens vurdering af varebundter, hans præferencerelation.

Noget andet er, at man med fuld ret kan være skeptisk over for de krav, vi har stillet til præferencerelationen, f.eks. at $\succsim$ skal være total og transitiv. Senere har det i øvrigt vist sig, at hovedparten af vore senere resultater kan fås uden disse antagelser – men på bekostning af et lidt større matematisk apparat.

3.2.4. For ethvert $x' \in X$ har vi en mængde $\{x \in X \mid x \sim x'\}$, som også kan skrives $\{x \in X \mid S(x) = S(x')\}$ af punkter x, således at forbrugeren er indifferent mellem x og x'. Denne mængde vil vi kalde *indifferensfladen* gennem x' (for $l = 2$ *indifferenskurven*). Mængderne $\{x \in X \mid S(x) \geq S(x')\}$ og $\{x \in X \mid S(x) \leq S(x')\}$ kaldes henholdsvis *øvre* og *nedre konturmængde.*



Figur 3.5

3.2.5. Vi vil ofte få brug for yderligere antagelser om forbrugerens præferencerelation. Da vi har antaget denne beskrevet ved nyttefunktionen S, vil vi formulere de følgende forudsætninger direkte på nyttefunktionen (men de kunne også, omend lidt mere omstændeligt, formuleres som antagelser om $\succsim$).

FORUDSÆTNING F2: *Nyttefunktionen S er monoton, dvs. hvis der for $x^1, x^2 \in X$ gælder, at $x_h^1 > x_h^2$, $h = 1, \dots, l$, da er $S(x^1) > S(x^2)$.*

Forudsætningen siger, at giver vi forbrugeren mere af alle goder, stiger hans nytte. Det kan lyde rimeligt nok, men man kunne forestille sig et forbrug så stort, at det ikke var fysisk muligt for vores forbruger at bruge mere. Får han da mere, kan han naturligvis smide det væk – men F2 kræver, at nytten skal vokse.

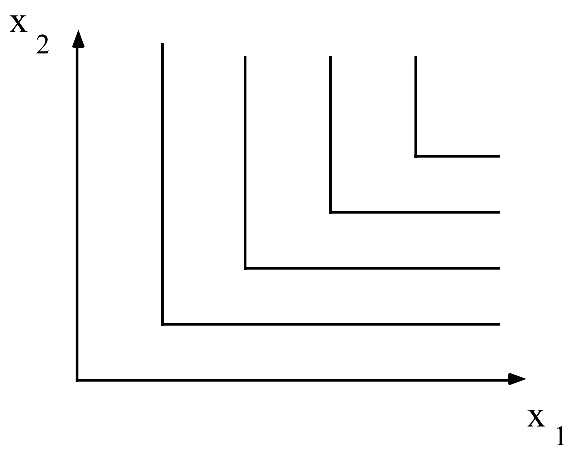
3.2.6. Vor næste forudsætning er

FORUDSÆTNING F3: *Nyttefunktionen S er strengt quasi-konkav: Hvis $x^1, x^2, x^3 \in X$ er således, at $x^1 \neq x^2$, $S(x^1) \geq S(x^2)$ og $x^3 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ for et reelt tal λ med $0 < \lambda < 1$, da er $S(x^3) > S(x^2)$.*

Geometrisk betyder F3, at de øvre konturmængder (de såkaldt foretrukne mængder) er konvekse. Der må endda gælde, at hvis x^1 og x^2 ligger på samme indifferensflade, vil det åbne linjestykke (x^1, x^2) (endepunkterne er ikke med) ligge over indifferensfladen (se Figur 3.5). Denne kan altså ikke have "flade" segmenter.

Hvad betyder F3 for vor fortolkning? Det er ikke svært at finde eksempler, hvor F3 er tvivlsom (standardeksemplet er forbrugeren, som er indifferent mellem at drikke $1/2$ liter fadøl eller $1/2$ liter rødvin til sin middag. Det er ikke oplagt, at han vil foretrække alternativet $1/4$ liter fadøl $+ 1/4$ liter rødvin for begge de første alternativer). F3 er således ikke en forudsætning, vi er begejstrede for, men den viser sig at være væsentlig, når vi skal nå til resultater for forbrugerens adfærd.

3.2.7. Fra tid til anden vil vi anlægge marginalbetragtninger og får så brug for, at nyttefunktionen er differentiabel. Generelt siges en funktion S af l variable at være



Figur 3.6

C^1 i punktet $x = (x_1, \ldots, x_l)$, hvis S har partielle afledede $\partial S/\partial x_h = S'_h$ efter hver variabel x_h, $h = 1, \ldots, l$ i en omegn af x, og hver af disse partielle afledede, opfattet som funktion af det punkt, hvor den tages, er kontinuert i x.

Funktionen S siges at være C^2, hvis hver af de partielle afledede er C^1. Vi har således den anden (partielle) afledede S''_{hk} (S differentieret efter x_h og derpå efter x_k) for alle h og k. Når S er C^2 , er $S''_{hk} = S''_{kh}$.

For at lette notationen vil vi indføre betegnelsen S' for vektoren $(S'_1, \ldots, S'_l)$ og S'' for matricen med (h, k)'te element S''_{hk}.

FORUDSÆTNING F4. *S er C^2 i ethvert punkt x i det indre af X, og matricen*

$$\begin{pmatrix} S''_{11} & S''_{12} & \ldots & S''_{1l} & S'_1 \\ S''_{21} & S''_{22} & \ldots & S''_{2l} & S'_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ S''_{l1} & S''_{l2} & \ldots & S''_{ll} & S'_l \\ S'_1 & S'_2 & \ldots & S'_l & 0 \end{pmatrix}$$

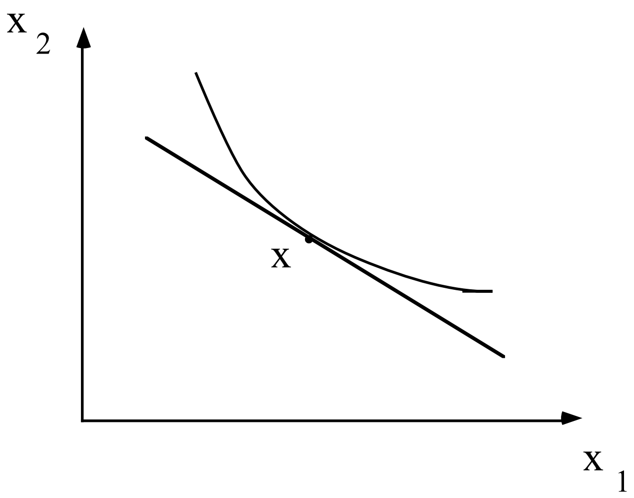
har fuld rang $l + 1$.

Sidste del af F4 har den konsekvens, at S' er forskellig fra nulvektoren i ethvert punkt (idet en matrix jo ikke kan have fuld rang, hvis en af søjlerne består af nuller). I øvrigt er denne matrixbetingelse lidt svær at gennemskue – den kan vises at betyde noget for indifferenskurvernes krumning og vil kun blive benyttet en enkelt gang i denne bog.

3.2.8. Et eksempel på en nyttefunktion, som ikke er differentiabel, er

$$S(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

defineret på $\mathbb{R}^2_+$. Indifferenskurverne er vist på Figur 3.6.



Figur 3.7

Hvis x_2 holdes fast, f.eks. på $x_2 = 1$, og x_1 varieres, fås en funktion af én variabel, som er lineær i intervallet $0 \leq x_1 \leq 1$ og konstant for $x_1 \geq 1$. Den har et knæk i punktet $x_1 = 1$. Altså er den partielle afledede af S efter x_1 ikke defineret i punktet $(x_1, x_2) = (1, 1)$. (Giv en fortolkning af præferencerelationen beskrevet ved S!).

3.2.9. Antag nu, at F4 er opfyldt, og betragt et punkt x i det indre af X (det vil vi i det følgende skrive som $x \in \operatorname{int} X$). Hvis vi giver hver af x's koordinater $x_1, \ldots, x_l$ en lille (strengt taget infinitesimal, dvs. uendeligt lille) ændring $dx_1, \ldots, dx_l$, kan vi finde ændringen i funktionsværdien af S ved

$$dS = \sum_{h=1}^{l} S'_h \, dx_h.$$

Specielt kan vi betragte en vektor $dx = (dx_1, \ldots, dx_l)$, således at

(1) kun dx_h og dx_k er forskellige fra 0 ($h \neq k$), og

(2) forbrugeren forbliver på indifferensfladen gennem x, dvs. $S(x + dx) = S(x)$ eller $dS = 0$.

Da får vi

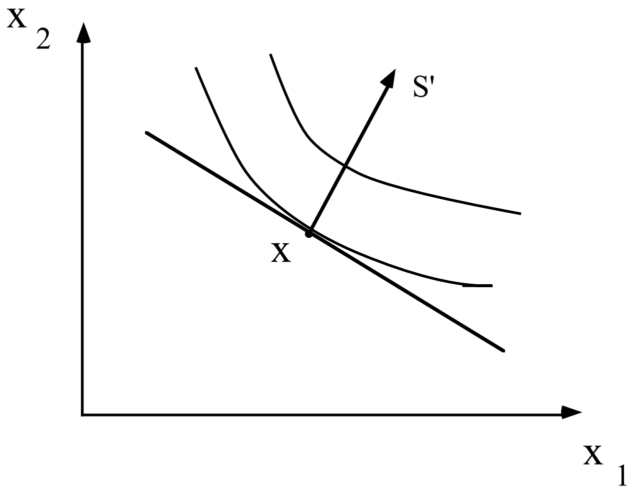
$$S'_h \, dx_h + S'_k \, dx_k = 0$$

eller

$$-\frac{dx_h}{dx_k} = \frac{S'_k}{S'_h}.$$

Venstre side kaldes det *marginale substitutionsforhold* for vare h mht. vare k (i punktet x). Det udtrykker den mængde af vare h, som forbrugeren vil kræve for at opgive en (lille) enhed af vare k.

For $l = 2$ er det marginale substitutionsforhold (for vare 2 mht. vare 1) netop tangenthældningen (numerisk) for indifferenskurven i punktet x (se Figur 3.7).



Figur 3.8

3.2.10. Vi kan benytte ræsonnementet ovenfor til at give en geometrisk fortolkning af vektoren $S' = (S'_1, \ldots, S'_l)$ af partielle afledede (i et vist punkt). Hvis vi som før lader $dx = (dx_1, \ldots, dx_l)$ være en vektor af små ændringer fra punktet x, således at nytten er uændret, dvs. så at vi bliver på indifferensfladen gennem x, har vi

$$0 = dS = \sum_{h=1}^{l} S'_h \, dx_h = S' \cdot dx,$$

hvor det sidste udtryk er skalarproduktet af S' og dx. At dette er 0 betyder, at de to vektorer står vinkelret på hinanden. Det ses heraf, at S' står vinkelret på tangentfladen til indifferensfladen i x; man siger, at S' er en normal (til tangenten) i x. Retningen på S' kan findes ved at betragte en tilvækstvektor dx, der får nytten til at vokse: Vi har da $S' \cdot dx > 0$, så vektoren S' peger i den retning, hvor nytten vokser.

Vektoren S' kaldes ofte gradienten af S (i punktet x), se Figur 3.8.

3.2.11. Når vi i det følgende får brug for F4, vil det i hvert enkelt tilfælde være retningen af vektoren S' og ikke længden, der har betydning. Eller sagt på en anden måde: Det er vigtigt, at den underliggende præferencerelation har en differentiabel repræsentation, derimod ikke hvilken konkret repræsentation, der vælges.

Antag således, at S opfylder F4, og lad $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en voksende funktion, som er 2 gange differentiabel med kontinuert anden afledet. Lad $\bar{S}$ være funktionen $\varphi \circ S$ givet ved $\bar{S}(x) = \varphi(S(x))$. Da er $\bar{S}$ differentiabel og

$$\bar{S}'_h(x) = \varphi'(S(x)) S'_h(x), \; h = 1, \ldots, l,$$

så vektoren $\bar{S}'$ er en skalar (nemlig $\varphi'(S(x)) > 0$) gange S', dvs. $\bar{S}'$ og S' har samme retning.

Det kan vises, at også de resterende betingelser i F4 vil være opfyldt af $\bar{S}$.

3.2.12.* *Særlige funktionsformer:* Undertiden vil man i specielle modeller ønske at forudsætte visse særlige egenskaber ved nyttefunktionen. F.eks. at S kan skrives

$$S(x_1, \dots, x_l) = u_1(x_1) + \cdots + u_l(x_l),$$

hvor $u_1, \dots, u_l$ er funktioner af én variabel. En sådan nyttefunktion kaldes (additiv) *separabel.*

Da man i midten af 1800-tallet begyndte at arbejde med nyttefunktioner, antog man normalt, at de havde denne form. En konsekvens heraf bliver, at det marginale substitutionsforhold

$$-\frac{dx_h}{dx_k} = \frac{S'_k}{S'_h} = \frac{u'_k}{u'_h}$$

kun afhænger af x_h og x_k (men altså ikke af de øvrige variable). Den generelle form for nyttefunktioner (som vi bruger) indførtes senere af Edgeworth.

Hvis nyttefunktionen S er *positivt homogen af k'te grad* for $k > 0$, hvilket vil sige, at

$$S(\lambda x_1, \dots, \lambda x_l) = \lambda^k S(x_1, \dots, x_l)$$

for ethvert reelt tal $\lambda > 0$, siges præferencerelationen beskrevet ved S at være *homotetisk.* Her vil det marginale substitutionsforhold i punkter $x = (x_1, \dots, x_l)$ og $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_l)$ (dvs. punkter på samme stråle fra origo) være ens, idet

$$S'_h(\lambda x_1, \dots, \lambda x_l) = \lambda^{k-1} S'_h(x_1, \dots, x_l).$$

3.3. Forbrugerens adfærd på et marked. Efterspørgselsfunktionen

3.3.1. Vi har nu indført de begreber, forbrugsmulighedsområde og nyttefunktion, som karakteriserer forbrugeren i vore modeller. I det følgende vil vi skrive en forbruger som (X, S). Derved har vi i forbrugerens "navn" angivet netop de karakteristika ved forbrugeren, der er af betydning for os (ligesom CPR-numre indeholder de oplysninger, der karakteriserer borgerne, set fra kommuner m.v.). Har vi en samling af m forbrugere, skriver vi $(X_i, S_i)_{i=1}^m$.

3.3.2. Vi kan nu undersøge, hvorledes forbrugeren reagerer i en given institutionel sammenhæng. På dette sted vil vi nøjes med at betragte en enkelt type institution, nemlig et marked (jf. 1.4.5).

Generelt defineres et marked som en delmængde M af varerummet $\mathbb{R}^l$. Elementerne i M er de handeler, agenterne (her: forbrugerne) kan foretage på dette marked. Vi vil antage, at markedet er givet ved et prissystem $p \in \mathbb{R}^l$, dvs. at det har formen

$$M_p = \{z \in \mathbb{R}^l \mid p \cdot z \leq 0\}.$$

En handel z fra markedet M_p vil typisk have visse positive og visse negative koordinater, svarende til at forbrugeren ved denne handel forøgede eller formindskede sin beholdning af de pågældende varer (eller, hvis det drejer sig om en bestemt type arbejdskraft, at han har leveret en vis mængde heraf). Vi kan altså forestille os, at vor forbruger starter med en vis beholdning af de l varer, dvs. et varebundt $\omega \in \mathbb{R}^l$, og gennem handelen z når til varebundtet $x = \omega + z$. Klart nok kan han ved at handle på markedet M_p nå alle varebundter x med $p \cdot x \leq p \cdot \omega$.

Bemærk, at hvis forbrugeren starter med en anden beholdning ω' med $p \cdot \omega' = p \cdot \omega$, kan han nå de samme varebundter. Med andre ord er det her kun værdien ved prissystemet p af startbeholdningen, som er af betydning. Denne vil vi i det følgende betegne med R og kalde forbrugerens indkomst. Hvor den i øvrigt kommer fra, vil vi ikke bekymre os om på dette sted.

3.3.3. Lad os resumere diskussionen: Vi har en forbruger (X, S) med en indkomst R, som kan handle på markedet M_p. Derved kan han handle sig til ethvert varebundt $x \in \mathbb{R}^l$ med $p \cdot x \leq R$.

Blandt disse varebundter vil forbrugeren nu søge at nå til det bedst mulige – dvs. et varebundt, som dels er et muligt forbrug, og dels er det bedste blandt de opnåelige mulige forbrug. Lad os kalde dette for *forbrugerens problem* (FP):

Et varebundt $x^0 \in \mathbb{R}^l$ siges at være en løsning til FP, hvis

(1) $x^0 \in X$,

(2) x^0 *maksimerer* S *på mængden*

$$\gamma(p, R) = \{x \in X \mid p \cdot x \leq R\}.$$

Mængden $\gamma(p, R)$ kaldes *budgetmængden.*

(Bemærk, at hvis vore l varer er Q goder til levering over T perioder, dvs. $l = QT$ (jf. 1.3.8), vil uligheden $p \cdot x \leq R$ kunne skrives

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{q=1}^{Q} p_{qt} x_{qt} \leq R,$$

hvoraf vi ser, at det kun er det samlede køb over hele perioden, som skal være mindre end R – der er ikke yderligere restriktioner på købet i den enkelte periode. Derfor er betegnelsen “indkomst” for R egentlig lidt misvisende, og man bruger ofte betegnelsen “velstand”. Det engelske ord er “wealth”.)

3.3.4. Efter at have formuleret forbrugerens problem er det vort problem at sikre os, at det har en løsning (en model, hvor vi sætter agenterne til at rode rundt efter noget, som ikke findes, kan måske bruges til at beskrive neuroser, men ikke forbrugeradfærd).

Det første problem er, at forbrugerens indkomst kan være så lille, at han ikke kan købe noget muligt forbrug. Dette er tilfældet, hvis $R < v_X(p)$, hvor

$$v_X(p) = \inf \{p \cdot x \mid x \in X\}$$

("inf" står for infimum – det største tal mindre end eller lig alle tal i mængden).

3.3.5. Den følgende lille hjælpesætning (det kaldes et lemma) vil være nyttig et par gange senere hen. Den siger, at hvis alle varer koster noget, er der for en given indkomst grænse for, hvor meget man kan få af hver enkelt vare, også selv om priserne og indkomsten ændres en smule.

LEMMA. *Antag, at forbrugeren (X, S) opfylder F1, og at $p_h > 0$, $h = 1, \ldots, l$. Da findes der vektorer $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}^l$, således at hvis p' er et prissystem med*

$$\frac{1}{2}p_h \leq p'_h \leq 2p_h,\ h = 1, \ldots, l,$$

og R' er en indkomst med $R' \leq R+1$, da vil der for ethvert $x \in \gamma(p', R')$ gælde

$$\underline{c}_h \leq x_h \leq \bar{c}_h,\ h = 1, \ldots, l.$$

BEVIS: Fra F1 har vi, at der findes et $b \in \mathbb{R}^l$, så $b_h \leq x_h$, $h = 1, \ldots, l$, for ethvert $x \in X$. Lad $\underline{c} \in \mathbb{R}^l$ være defineret ved $\underline{c}_h = b_h$ for $b_h \leq 0$, $\underline{c}_h = 0$, hvis $b_h > 0$. Vi har da $\underline{c}_h \leq x_h$, $h = 1, \ldots, l$, for $x \in \gamma(p', R')$, p' og R' vilkårlig, idet $\gamma(p', R') \subset X$.

Antag nu, at p' og R' opfylder betingelserne i lemma'et, og lad $x \in \gamma(p', R')$ være vilkårlig. Da er

$$\sum_{h=1}^{l} p'_h x_h \leq R' \quad \text{eller}$$

$$p'_h x_h \leq R' - \sum_{k \neq h} p'_k x_k.$$

Da $x_k \geq \underline{c}_k$, $k = 1, \ldots, l$, må $-\sum_{k \neq h} p'_k x_k \leq -\sum_{k \neq h} p'_k \underline{c}_k$. Endvidere er $-p'_h \underline{c}_h \geq 0$. I alt får vi da

$$p'_h x_h \leq R' - \sum_{h=1}^{l} p'_h \underline{c}_h$$

eller

$$x_h \leq \frac{R' - p' \cdot \underline{c}}{p'_h}.$$

Vi vurderer nu R' opad ved $R + 1$, $-p' \cdot \underline{c}$ ved $-2p \cdot \underline{c}$ og p'_h nedad ved $p_h/2$. I alt fås

$$x_h \leq 2\frac{R + 1 - 2p \cdot \underline{c}}{p_h}.$$

Hvis vi kalder højre side for $\bar{c}_h$, har vi dermed en vektor $\bar{c}$ med de ønskede egenskaber. □

3.3.6. Vi kan nu – under passende forudsætninger – vise eksistens og entydighed af løsning til FP.

Antag, at forbrugeren (X, S) opfylder F1, at $p_h > 0$, $h = 1, \dots, l$, og at $R > v_X(p)$. Da gælder

(i) der findes en løsning til FP.

(ii) hvis (X, S) desuden opfylder F2, vil der for enhver løsning x^0 til FP gælde $p \cdot x^0 = R$.

(iii) hvis endvidere F3 er opfyldt, er løsningen til FP entydigt bestemt.

Bevis: (i) Betingelsen $R > v_X(p)$ giver, at $\gamma(p, R) \neq \emptyset$. Fra lemma 3.3.5 (anvendt på $p' = p$, $R' = R$) har vi, at $\gamma(p, R)$ er begrænset. Endelig er $\gamma(p, R)$ afsluttet, idet den er fællesmængde af X (der er afsluttet iflg. F1) og den afsluttede mængde $\{x \in \mathbb{R}^l \mid p \cdot x \leq R\}$.

Vi har således, at $\gamma(p, R)$ er ikke-tom, afsluttet og begrænset. Ifølge Weierstrass' sætning har funktionen S, der er kontinuert, et maksimum x^0 på $\gamma(p, R)$. Men dette x^0 er netop en løsning til FP.

(ii) Antag $p \cdot x^0 = \sum_{h=1}^{l} p_h x_h^0 < R$. Vælg et tal $\varepsilon > 0$ så lille, at $\sum_{h=1}^{l} p_h(x_h^0 + \varepsilon) < R$. Da er vektoren x^1 med $x_h^1 = x_h^0 + \varepsilon$, $h = 1, \dots, l$, et element i $\gamma(p, R)$, og ifølge F2 er $S(x^1) > S(x^0)$, en modstrid.

(iii) Lad x^0 og x^1 være forskellige løsninger til FP. Da må $S(x^0) = S(x^1)$. Vælg λ så $0 < \lambda < 1$ og betragt

$$x^2 = \lambda x^0 + (1 - \lambda)x^1.$$

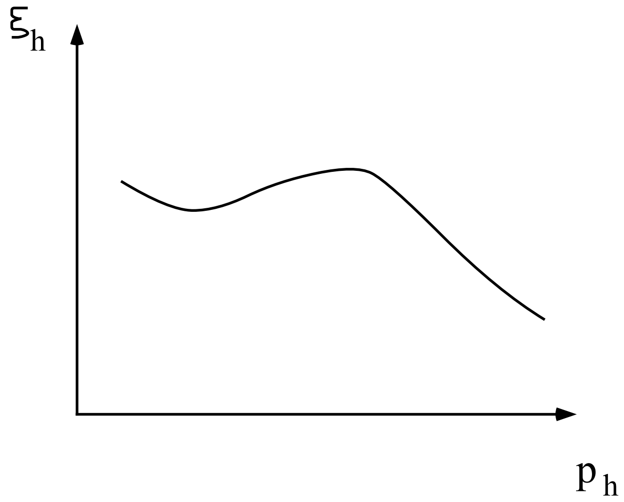
Mængden $\gamma(p, R)$ er konveks (hvorfor?), så $x^2 \in \gamma(p, R)$. Fra F3 fås $S(x^2) > S(x^1)$ i strid med, at x^1 løser FP. □

3.3.7. Det kan virke ejendommeligt, at forbrugeren i vores model bruger hele sin indkomst (3.3.6. (ii)). Det er dog til dels brugen af ordet “indkomst”, der snyder. Hvis vi husker fortolkningen af varebegrebet, vil opsparing i vores model ske ved, at man køber varer til levering i fremtidige perioder. Forbrugeren i vores model kan altså godt spare op. Noget andet er, at denne form for opsparing måske ikke er overvældende realistisk.

3.3.8. Fra sætningen i 3.3.6. ser vi, at der for ethvert p og R bestemmes netop én løsning x til FP. Vi kan altså opfatte x som en funktion ξ af p og R og skrive

$$x = \xi(p, R).$$

Funktionen ξ kaldes *efterspørgselsfunktionen.*



Figur 3.9

Hvis vi holder alle priser på nær p_h og indkomsten fast og kun betragter den h'te koordinatfunktion, kan vi afbilde den f.eks. som vist i Figur 3.9.

3.3.9. På dette sted vil vi indskyde endnu et lemma, som ikke er særlig interessant i sig selv, men det vil forkorte et senere bevis, hvis vi tager det særskilt:

LEMMA. *Antag, at (X, S) opfylder F1, at $p_h > 0$, $h = 1, \dots, l$, og at $R > v_X(p)$.*

Hvis (p^n, R^n) er en følge, som går mod (p, R), og $\gamma(p^n, R^n) \neq \emptyset$ for alle n, og hvis $x \in \gamma(p, R)$, $p \cdot x = R$, da findes en følge (u^n) med $u^n \in \gamma(p^n, R^n)$, så $u^n \to x$.

BEVIS: Lad $u \in X$ være således, at $p \cdot u < R$. Da $(p^n, R^n) \to (p, R)$, må der gælde $p^n \cdot u < R^n$ for n større end et vist $\bar{n}$. For ethvert $n > \bar{n}$ sættes nu

$$u^n = x \text{ hvis } x \in \gamma(p^n, R^n),$$
$$u^n = \frac{p^n \cdot x - R^n}{p^n \cdot x - p^n \cdot u}\, u + \frac{R^n - p^n \cdot u}{p^n \cdot x - p^n \cdot u}\, x \text{ ellers.}$$

(Bemærk, at hvis $x \notin \gamma(p^n, R^n)$, er $p^n \cdot x > R^n > p^n \cdot u$).

For $n < \bar{n}$ sættes u^n til et vilkårligt element i $\gamma(p^n, R^n)$. Det er let at se, at $u^n \in \gamma(p^n, R^n)$ for alle n.

For $n \to \infty$ går $p^n \cdot x$ mod $p \cdot x$, $p^n \cdot u$ mod $p \cdot u$ og R^n mod R. Derved går u^n mod x. □

3.3.10. Vi kan nu vise, at efterspørgselsfunktionen er kontinuert. Beviset er ikke helt let, og det kan derfor være på sin plads at overveje, hvorfor vi gør os alt det besvær.

Det første argument er, at det er vigtigt for senere resultater. Men så kunne man jo blot antage, at ξ var kontinuert, og måske henvise til, at "natura non facit saltum".

Hertil er at sige, at vi beskæftiger os ikke med "natura", men med noget, vi har afledt af simple antagelser i en model. Det er utilfredsstillende at forudsætte noget om de afledte begreber, det bør kunne udledes af egenskaber ved de mere primitive begreber.

Nu til sagen:

Lad (X, S) være en forbruger, der opfylder F1, F2 og F3. Da er efterspørgselsfunktionen ξ kontinuert i ethvert punkt (p, R), hvor $p_h > 0$, $h = 1, \ldots, l$, og $R > v_X(p)$.

BEVIS: Antag, at ξ ikke er kontinuert i (p, R). Da må der findes en følge (p^n, R^n), som går mod (p, R), men således, at følgen (x^n) med $x^n = \xi(p^n, R^n)$ ikke går mod $x = \xi(p, R)$. Ved eventuelt at smide nogle elementer i følgen væk kan vi opnå, at x^n altid ligger længere end $\varepsilon > 0$ fra x.

Vi kan antage, at der for alle n gælder, at $\frac{1}{2}p_h \leq p_h^n \leq 2p_h$, $h = 1, \ldots, l$, og $R^n < R + 1$. Vi får da fra lemma 3.3.5, at følgen (x^n) ligger i en afsluttet og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^l$. Dette betyder, at den har en delfølge, som konvergerer mod et eller andet x^*.

Da $x^n \in X$, alle n, og $x^n \to x^*$, må $x^* \in X$ (F1). Af $p^n \cdot x^n = R^n$ (sætning 3.3.6 (ii)) fås $p \cdot x^* = R$ eller $x^* \in \gamma(p, R)$. Da $x = \xi(p, R)$ er den entydige løsning til FP og $x \neq x^*$, har vi $S(x^*) < S(x)$.

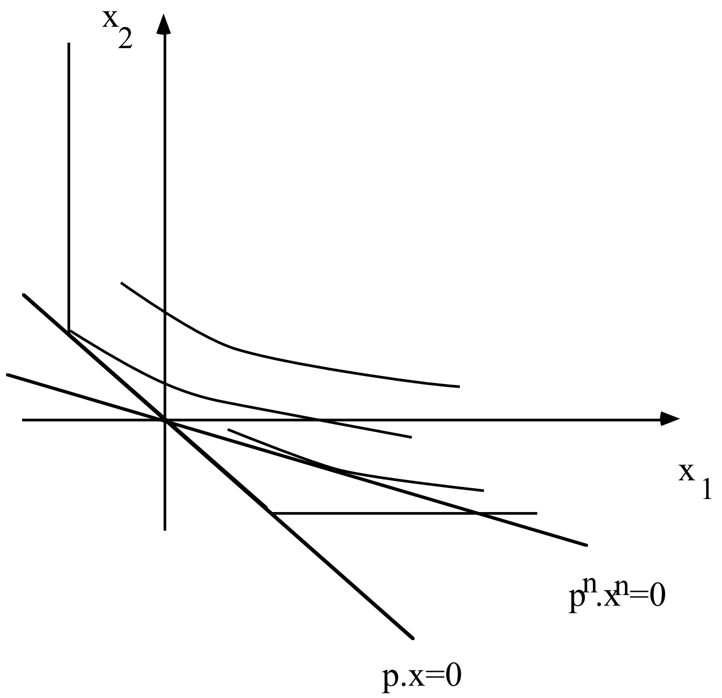
På den anden side har vi fra lemma 3.3.9, at der findes en følge (u^n) med $u^n \in \gamma(p^n, R^n)$, så $u^n \to x$. Vi har $S(x^n) \geq S(u^n)$ for hvert n, og for $n \to \infty$ fås $S(x^*) \geq S(x)$, en modstrid. $\square$

3.3.11. Et eksempel på et punkt (p, R), hvor ξ ikke er kontinuert, er følgende:

Betragtes følgen $(p^n, 0)$, som går mod $(p, 0)$, således at budgetlinjerne drejer om punktet 0, vil $\xi(p^n, 0)$ nærme sig 0, men $\xi(p, 0) \neq 0$. Det er vist i Fig.3.10, hvor en budgetlinje hørende til pris p^n og indkomst 0 er indtegnet. Budgetmængden er trekanten begrænset af denne linje og forbrugsmulighedsområdet; den er helt indeholdt i 4. kvadrant, så der vil $\xi(p^n, 0)$ ligge for alle p^n i følgen. Ude i grænsen vil man derimod få en del nye punkter med, og løsningen til FP ligger faktisk ret langt væk fra 4. kvadrant. Bemærk, at lemma 3.3.9 ikke kan bruges her, idet $R = v_X(p) = 0$.

3.4.* En anvendelse af forbrugerteorien

3.4.1. Inden vi fortsætter med at udvikle vor teori om forbrugeren, vil vi se på en anvendelse af denne teori, nemlig problemet omkring konstruktion af et rimeligt



Figur 3.10

(forbruger-)prisindeks.

Udgangspunktet er to alternative situationer (0 og 1) med hver sit prissystem p^0 og p^1. Vi ønsker at finde et mål for prisniveauet, som kan fortælle os, hvor meget priserne "i gennemsnit" er ændret fra situation 0 til situation 1.

Et konkret forslag hertil får vi ved *Laspeyres' indeksformel*

$$\mathrm{La}_{01} = \frac{p^1 \cdot x^0}{p^0 \cdot x^0},$$

hvor x^0 er det varebundt, forbrugeren faktisk købte ved prissystemet p^0.

Et andet forslag er *Paasche-indekset*

$$\mathrm{Pa}_{01} = \frac{p^1 \cdot x^1}{p^0 \cdot x^1} \quad \left(= \frac{1}{\mathrm{La}_{10}} \right);$$

et tredje er *"Fisher's ideal-indeks"* $\mathrm{Fi}_{01} = \sqrt{\mathrm{La}_{01}\mathrm{Pa}_{01}}$, og der er masser af andre indeksformler, som vi ikke skal komme ind på (hvorfor skal vi se om lidt).

3.4.2. Givet en eller anden indeksformel P_{01} kan man undersøge, om den opfylder visse konsistenskrav (de såkaldte "tests"). For eksempel virker det jo rimeligt, hvis

$$P_{01}P_{10} = 1$$

("frem og tilbage er lige langt") eller, mere generelt, hvis vi har flere situationer $0, 1, 2, \dots, k$, om

$$P_{01}P_{12}, \dots, P_{k-1,k}P_{k0} = 1.$$

Videre kunne man efter samme principper konstruere mængdeindeks Q_{01} og så undersøge, om

$$P_{01}Q_{01} = V_{01},$$

hvor V_{01} er et indeks for værdien af forbruget (og det kan dårligt være andet end $p^1 \cdot x^1 / p^0 \cdot x^0$).

Man ser let, at hverken La eller Pa opfylder det første krav. Det gør Fi (sådan er det nemlig konstrueret), men til gengæld opfylder Fi ikke krav nr. 2. Men det er der så måske et helt fjerde indeks, som gør.

Sådanne overvejelser førte i sin tid (1920'erne og 1930'erne) til konstruktion af over hundrede forskellige indeksformler, som alle sammen havde en eller anden defekt. Hele historien er et eksempel på, hvad der sker, når man konstruerer målingsmetoder uden at overveje, hvad man vil måle. Konsistenskravene er udtryk for et (naivt) håb om, at man efter en passende aggregering (indeksberegning) kan behandle vektorer (prissystemer og varebundter), som om det var tal. Det var dømt til at mislykkes.

3.4.3. Lad os derfor præcisere, hvad vi vil med et indeks. Med et forbrugerprisindeks P_{01} ønsker vi at angive, med hvilken faktor forbrugerens indkomst skal ændres, for at hans situation er den samme trods de ændrede priser.

Med notationen, som vi har indført i de forrige afsnit, betyder dette, at P_{01} er bestemt ved ligningen

$$(*) \qquad S(\xi(p^1, P_{01}R^0)) = S(\xi(p^0, R^0)).$$

Det er let at se, at La_{01} ikke opfylder denne betingelse. Vi har nemlig

$$p^1 \cdot \xi(p^0, R^0) = \mathrm{La}_{01} p^0 \cdot \xi(p^0, R^0) = \mathrm{La}_{01} R^0,$$

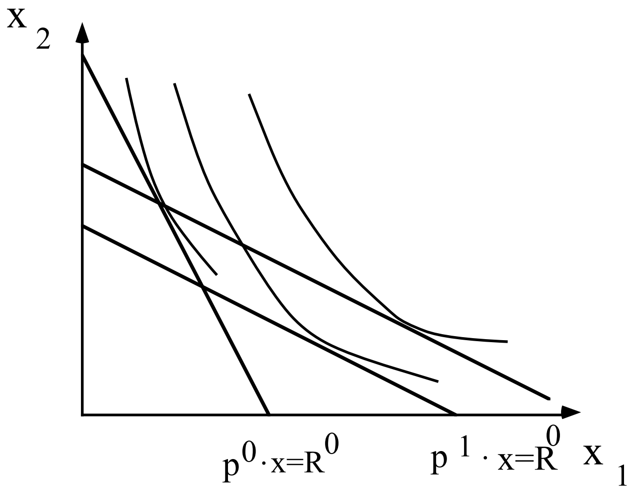
så forbrugeren kan (hvis han kompenseres efter La) købe $\xi(p^0, R^0)$ også ved priserne p^1. Altså er $S(\xi(p^0, R^0)) \leq S(\xi(p^1, P_{01}R^0))$, og ulighedstegnet vil typisk være gældende.

Vi ser, at La giver overkompensation, jf. Figur 3.11. (Dette resultat har naturligvis ikke noget at gøre med, om den tidligere danske dyrtidsordning – hvor der blev brugt et prisindeks af La-typen – gav mere eller mindre fuld dækning for prisstigningerne, idet der jo ikke kompenseredes ved procentuel forøgelse af indkomsterne. I øvrigt gav denne ordning langtfra fuld dækning).

3.4.4. Hvis vort ("rigtige") indeks skal være bestemt ved (*) i 3.4.3, kan vi straks drage nogle konklusioner. For givne prissystemer p^0 og p^1 kan vi finde en sammenhæng Ψ mellem indkomst R^0 og det beløb, der ved priserne p^1 sætter forbrugeren i stand til at nå samme nytteniveau som ved priserne p^0 og indkomsten R^0.

Uden kendskab til forbrugerens karakteristika kan vi om Ψ ikke sige andet, end at den er monotont voksende. Men i 3.4.3 (*) kræves faktisk, at

$$\Psi(R^0) = P_{01}R^0,$$



Figur 3.11

dvs. at grafen for Ψ er en ret linje gennem 0 med hældningen P_{01}. Vi kan altså konkludere, at det rigtige indeks kun kan konstrueres, såfremt der gælder *udgiftsproportionalitet*, dvs. at $\Psi(R^0)/R^0$ er en konstant uafhængig af R^0.

3.4.5. Et eksempel på udgiftsproportionalitet får vi ved at betragte en homotetisk forbruger (jf. 3.2.12).

Lad (X, S) være en forbruger med $X = \mathbb{R}^l_+$ og S homogen af k'te grad ($k > 0$). Da gælder der for ethvert prissystem p, at $\xi(p, R) = R\xi(p, 1)$. Vi har nemlig, at for indkomsten R kan forbrugeren købe alle varebundter x med $p \cdot x \leq R$, hvilket er det samme som alle varebundter Rx', hvor $p \cdot x' \leq 1$ eller $x' \in \gamma(p, 1)$. Nytten $S(Rx')$ af et sådant varebundt er $R^k S(x')$ (idet S er homogen af k'te grad), og maksimering af S over alle varebundter med $p \cdot x \leq R$ er således det samme som maksimering af $R^k S(x')$ over $\gamma(p, 1)$. Dette maksimum antages i $\xi(p, 1)$, så maksimum af S over $\gamma(p, R)$ bliver $R^k S(\xi(p, 1)) = S(R\xi(p, 1))$, så $R\xi(p, 1) = \xi(p, R)$.

Det er nu let at vise udgiftsproportionalitet, idet

$$\begin{aligned} S(\xi(p^1, \Psi(R^0)) &= S(\xi(p^0, R^0)) = S(R^0\xi(p^0, 1)) \\ &= (R^0)^k S(\xi(p^0, 1)) = (R^0)^k S(\xi(p^1, \Psi(1)) \\ &= S(\xi(p^1, R^0\Psi(1)) \end{aligned}$$

eller $\Psi(R^0) = R^0\Psi(1)$, hvoraf $\Psi(R^0)/R^0 = \Psi(1)$, og vi er færdige.

Det kan i øvrigt vises, at kun homotetiske forbrugere har udgiftsproportionalitet.

3.5. Egenskaber ved efterspørgselsfunktionen

3.5.1. Lad (X, S) være en forbruger. Hvis prissystemet er $p = (p_1, \ldots, p_l)$ og hans indkomst R, vælger han $\xi(p, R)$.

Vi ganger nu alle priser $p_1, p_2, \ldots, p_l$ og indkomsten R med et positivt tal λ. Hvad sker?

Ingenting. Budgetmængden er uændret, idet

$$\gamma(\lambda p, \lambda R) = \{x \in X \mid \lambda p \cdot x \leq \lambda R\} = \{x \in X \mid p \cdot x \leq R\} = \gamma(p, R),$$

så løsningen til FP ændres ikke. Vi har altså

$$\xi(\lambda p, \lambda R) = \xi(p, R).$$

Man siger, at ξ er homogen af 0'te grad (jf. 3.2.12).

3.5.2. Hvis x^0 er løsning til FP givet p og R, må der gælde

$$S(x) > S(x^0) \Rightarrow p \cdot x > p \cdot x^0,$$

dvs. ethvert varebundt, som er bedre end x^0, er også dyrere. Omvendt vil et bundt $x^0 \in \gamma(p, R)$, som opfylder denne betingelse, være en løsning til FP.

Antag nu, at vi har et varebundt $x^0 \in \gamma(p, R)$, om hvilket vi blot ved, at $p \cdot x^0 = R$ og

$$S(x) \geq S(x^0) \Rightarrow p \cdot x \geq p \cdot x^0,$$

dvs. ethvert varebundt, som er mindst lige så godt som x^0, er mindst lige så dyrt. Dette kan også udtrykkes, som at x^0 minimerer udgiften blandt alle bundter, der er mindst lige så gode som x^0. Men er x^0 da en løsning til FP? Herom gælder følgende:

SÆTNING *("udgiftsminimering ⇒ nyttemaksimering") Hvis forbrugeren (X, S) opfylder F1 og $x^0 \in X$ er et varebundt med $p \cdot x^0 = R > v_X(p)$, som opfylder betingelsen*

$$S(x) \geq S(x^0) \Rightarrow p \cdot x \geq p \cdot x^0,$$

da er x^0 en løsning til FP.

BEVIS: Antag, $x^1 \in X$ er et varebundt, så $S(x^1) > S(x^0)$, men $p \cdot x^1 = p \cdot x^0$. Vælg et $x^2 \in X$, så $p \cdot x^2 < p \cdot x^0 = p \cdot x^1$. Da X er konveks (F1), er $[x^1, x^2] \subset X$. Vælg $x^3 \in [x^1, x^2]$ så tæt på x^1, at $S(x^3) > S(x^0)$ (det kan vi, da S er kontinuert), men $p \cdot x^3 < p \cdot x^1 = p \cdot x^0$. Vi har da $S(x^3) > S(x^0)$ og $p \cdot x^3 < p \cdot x^0$, en modstrid. □

3.5.3. I resten af dette afsnit vil vi antage, at forbrugeren (X, S) opfylder F4.

Lad os starte med endnu en gang at betragte formuleringen af FP: Forbrugeren skal finde et maksimum for S blandt alle varebundter $x \in X$ med $p \cdot x \le R$. Hvis også F2 er opfyldt, ved vi imidlertid, at løsningen x^0 vil opfylde $p \cdot x^0 = R$. Der er altså ingen grund til at søge løsninger til FP blandt andre varebundter end dem med $p \cdot x = R$, og vi kan derfor skrive FP som

Maksimér $S(x)$

under bibetingelsen

$$p \cdot x = R \text{ (eller } R - \sum_{h=1}^{l} p_h x_h = 0).$$

Da vi har forudsat S differentiabel (F4), kan vi udnytte et standardresultat om maksimering under bibetingelser:

Hvis forbrugeren (X, S) opfylder F2 og F4 og $x^0 \in intX$ er en løsning til FP, da findes et reelt tal λ, således at (x^0, λ) er løsning til ligningssystemet

$$(**) \qquad \begin{aligned} S_h'(x) - \lambda p_h &= 0, \; h = 1, \ldots, l, \\ R - \sum_{h=1}^{l} p_h x_h &= 0. \end{aligned}$$

Tallet λ kaldes en Lagrange-multiplikator. Sætningen siger, at hvis x^0 maksimerer S under bibetingelsen $R - p \cdot x = 0$, da er x^0 et ekstremumspunkt (dvs. alle de partielle afledede er 0) for Lagrange-funktionen

$$L(x, \lambda) = S(x) + \lambda(R - px).$$

3.5.4. Hvis vi nøjes med at betragte den h'te og k'te ligning ($h \neq k$), dvs. $S_h' = \lambda p_h$, $S_k' = \lambda p_k$, får vi (for $p_k \neq 0$), at

$$\frac{S_h'}{S_k'} = \frac{p_h}{p_k},$$

eller (jf. 3.2.9) at forbrugerens marginale substitutionsforhold mellem vare h og k er lig prisforholdet mellem varerne. Dette stemmer godt med intuitionen, idet det marginale substitutionsforhold kan opfattes som forbrugerens subjektive afvejning af varerne. Hvis denne subjektive afvejning ikke stemmer overens med den afvejning, som er givet ved markedet (dvs. prisforholdet mellem varerne), hvis f.eks. den pågældende forbruger vurderer vare h højere (i forhold til vare k) end markedet, vil det være fordelagtigt for ham at sælge lidt vare k og købe vare h, dvs. han var ikke i sit optimum.

3.5.5. En af fordelene ved sætning 3.5.3 er, at vi får udtrykt løsningen til FP som løsning til et ligningssystem, hvilket ofte er lettere at håndtere. Vi mangler dog endnu at sikre os, at enhver løsning til (**) faktisk er en løsning til FP.

Antag, at forbrugeren (X, S) opfylder F1 - F4, og at $p_h > 0$, $h = 1, \dots, l$. Hvis $x^0 \in$ int$X$ er således, at (x^0, λ) er en løsning til (**) for et vist λ, da er x^0 en løsning til FP.

BEVIS: Lad $x \in X$ være et vilkårligt bundt med $S(x) \geq S(x^0)$. For t et reelt tal med $0 \leq t \leq 1$ sætter vi

$$f(t) = S(tx + (1-t)x^0).$$

Da er f en differentiabel funktion af én variabel (nemlig t). Vi ønsker at finde differentialkvotienten i punktet $t = 0$. Det kan vi gøre ved at danne differenskvotienten

$$\frac{f(t) - f(0)}{t}$$

og lade $t \to 0$. Hvis vi indsætter, får vi

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{S(tx + (1-t)x^0) - S(x^0)}{t}.$$

Fra F3 ved vi, at tælleren er > 0, altså må $f'(0) \geq 0$.

Vi kan også udregne f' direkte (ved "kæde-reglen") og får da

$$f'(0) = \sum_{h=1}^{l} S'_h(x_h - x_h^0) \geq 0,$$

hvor S'_h er taget i punktet x^0.

Fra (**) har vi $S'_h = \lambda p_h$, $h = 1, \dots, l$. På grund af F2 må $S'_h \geq 0$, $h = 1, \dots, l$ (og iflg. F4 er ikke alle $S'_h = 0$). Da priserne er positive, er $\lambda > 0$.

Vi indsætter nu $S'_h = \lambda p_h$ og får

$$\sum_{h=1}^{l} \lambda p_h(x_h - x_h^0) \geq 0,$$

hvor λ kan forkortes væk, da den er positiv. Tilbage står $p \cdot (x - x^0) \geq 0$ eller $p \cdot x \geq p \cdot x^0$. Sætning 3.5.2 giver da, at x^0 er løsning til FP, idet betingelsen $p \cdot x^0 > v_X(p)$ følger af $x^0 \in$ int$X$. □

3.5.6. Vi kan bruge den nye formulering af FP som et ligningssystem til at undersøge, hvorledes efterspørgslen varierer med priserne. Vi har i (**) $l + 1$ funktioner af de variable x, λ, p og R (i alt $l+1+l+1$ variable). For givet p og R fås $\xi(p, R)$ netop som det x, for hvilket alle de $l+1$ funktioner er 0. Samtidig bestemmes så også λ, som vi ganske vist ikke er interesserede i på dette sted.

Hvis vi betegner vektorfunktionen bestemt ved venstresiderne i (**) som F, har vi altså, at x (og λ) er givet som funktion af p og R ved udtrykket

$$F(x, \lambda, p, R) = 0.$$

Man siger, at x (og λ) er givet som implicit funktion af p og R.

3.5.7.* Ved hjælp af et matematisk resultat ("implicit funktions sætning") kan vi finde de partielle afledede af ξ. Vi vil give et intuitivt argument for denne sætning.

Lad funktionen $v = g(u)$ være givet implicit ved udtrykket $f(u, v) = 0$ (u og v er reelle variable). Et eksempel er funktionen $v = \sqrt{au}$, som er givet ved $v^2 - au = 0$ (en parabelgren). For at finde g' kan vi tage differentialet af f,

$$df = f'_u du + f'_v dv.$$

Da g er bestemt ved, at f hele tiden er 0, er $df = 0$, hvoraf vi får

$$g' = \frac{dv}{du} = -(f'_v)^{-1} f'_u.$$

I parabeleksemplet giver dette $dv/du = a/2v$ (som man kan kontrollere ved at differentiere direkte i $v = \sqrt{au}$). Den generelle sætning (eller rettere en skrabet udgave specielt til vort formål) er følgende:

Antag, at funktionen $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ er implicit givet ved at $v = g(u)$ netop når

$$F(u, v) = 0,$$

hvor $F : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ er differentiabel med kontinuerte partielle afledede. Da er g differentiabel i ethvert punkt u, hvor der for $(u, v) = (u, g(u))$ gælder, at

$$D_v F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial v_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial v_k} \end{pmatrix}$$

er regulær, og matricen af g's partielle afledede er givet ved

$$Dg = -(D_v F)^{-1} D_u F.$$

3.5.8. I vor specielle situation er g den funktion af p og R, hvis første l koordinater er $\xi_1(p,R),\ldots,\xi_l(p,R)$, og den $(l+1)$'te koordinat λ. Vi får

$$Dg = -\begin{pmatrix} S''_{11} & S''_{12} & \ldots & S''_{1l} & -p_1 \\ S''_{21} & S''_{22} & \ldots & S''_{2l} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ S''_{l1} & S''_{l2} & \ldots & S''_{ll} & -p_l \\ -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_l & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 0 \\ -x_1 & -x_2 & \ldots & -x_l & 1 \end{pmatrix}$$

såfremt den første matrix er invertibel. Men vi har jo $p_h = \lambda^{-1} S'_h$, så denne matrix er invertibel, netop hvis

$$\begin{pmatrix} S''_{11} & S''_{12} & \ldots & S''_{1l} & S'_1 \\ S''_{21} & S''_{22} & \ldots & S''_{2l} & S'_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ S''_{l1} & S''_{l2} & \ldots & S''_{ll} & S'_l \\ S'_1 & S'_2 & \ldots & S'_l & 0 \end{pmatrix}$$

er invertibel – og dette er netop indeholdt i F4.

Lad os sætte

$$\begin{pmatrix} S''_{11} & S''_{12} & \ldots & S''_{1l} & -p_1 \\ S''_{21} & S''_{22} & \ldots & S''_{2l} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ S''_{l1} & S''_{l2} & \ldots & S''_{ll} & -p_l \\ -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_l & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & -v_1 \\ & U & & \vdots \\ & & & -v_l \\ -v_1 & \ldots & -v_l & w \end{pmatrix}.$$

Vi får da

$$D_p\xi = \lambda U - vx^t,\ D_R\xi = v,$$

hvor x^t er vektoren $x = \xi(p,R)$ transponeret, dvs. opfattet som rækkevektor.

For at få en fortolkning af dette indtil videre ret abstrakte udtryk vil vi betragte en samtidig ændring i priser og indkomst, således at *nytten holdes konstant.* Fra $dS = \sum_{h=1}^{l} S'_h\, dx_h = 0$ får vi $\sum_{h=1}^{l} p_h\, dx_h = 0$ og fra $dR = \sum_{h=1}^{l} p_h\, dx_h + \sum_{h=1}^{l} x_h\, dp_h$ får vi $\sum_{h=1}^{l} x_h\, dp_h = dR$. Vi har da

$$\begin{aligned} d\xi_h &= \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \xi_h}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial \xi_h}{\partial R} dR \\ &= \sum_{k=1}^{l} \lambda u_{hk}\, dp_k - \sum_{k=1}^{l} v_h x_k\, dp_k + v_h\, dR \\ &= \sum_{k=1}^{l} \lambda u_{hk}\, dp_k, \end{aligned}$$

hvoraf vi slutter, at λu_{hk} er den partielle afledede af ξ_h mht. p_k, når samtidig *indkomsten reguleres således, at nytten er konstant.* Dette skrives som

$$\lambda u_{hk} = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial p_k}\right)_{S=\text{konst.}}$$

3.5.9. Vi kan nu skrive udtrykket for de partielle afledede af ξ som

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial p_k} = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial p_k}\right)_{S=\text{konst.}} - \xi_k \frac{\partial \xi_h}{\partial R},\ h, k \in \{1, \ldots, l\}.$$

Disse udtryk kaldes *Slutsky-ligningerne* (efter den russiske økonom E.E. Slutskij, der fandt disse resultater omkring 1915). En anden måde at skrive dem på fås ved at notere sig, at matricen λU er symmetrisk (hvorfor?), så vi har

$$\frac{\partial \xi_h}{\partial p_k} + \xi_k \frac{\partial \xi_h}{\partial R} = \frac{\partial \xi_k}{\partial p_h} + \xi_h \frac{\partial \xi_k}{\partial R}.$$

3.5.10. Af udtrykket for $\partial \xi_h / \partial p_k$ i afsnit 3.5.9 ser vi, at resultatet af en prisændring er en sum af to led: Det første,

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial p_k}\right)_{S=\text{konst.}},$$

der kaldes *substitutionseffekten*, giver bevægelsen på indifferensfladen. Det andet led, *indkomsteffekten*, giver bevægelsen mellem indifferensfladerne.

Størrelsen $\partial \xi_h / \partial R$ kan være såvel positiv som negativ. I sidste tilfælde kaldes vare h en *inferiør* vare. Om fortegnene for $\partial \xi_h / \partial p_k$ kan der ikke siges noget generelt. Det kan dog vises, at matricen U, og dermed matricen med elementer

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial p_k}\right)_{S=\text{konst.}},$$

er negativ semidefinit, hvilket blandt andet medfører, at diagonalelementerne er ≤ 0.

Hvis vare h er inferiør, kan det forekomme, at $\partial \xi_h / \partial p_h > 0$, selv om det første led, substitutionseffekten, altid er ≤ 0. I så fald kaldes vare h en *Giffen*-vare.

(Definitioner af denne art er i øvrigt af tvivlsom værdi, idet de relaterer til værdien af visse afledede i en bestemt pris-indkomst-kombination. Den samme vare kan være inferiør ved én pris-indkomst-kombination og ikke-inferiør ved en anden).

3.6. Afslørede præferencer

3.6.1. I de foregående afsnit har vi ud fra visse grundlæggende antagelser om forbrugeren udledt nogle resultater om hans adfærd på markedet – nemlig efterspørgselsfunktionen og egenskaber ved denne.

Men er vore grundlæggende antagelser – specielt den, at forbrugeren har en nyttefunktion, som han maksimerer under budgetbetingelsen – nu også rimelige? Det er klart, at vi ikke vil have succes med at spørge forbrugeren selv om, hvordan hans nyttefunktion ser ud, og om han nu også har fundet et maksimum. Det eneste, vi kan observere, er forbrugerens faktiske adfærd på markedet.

Overvejelser af denne art førte til, at man en overgang (Samuelson 1938) valgte at droppe nyttemaksimerings-historien og tog udgangspunkt direkte i efterspørgselsfunktionen.

3.6.2. Lad h være en funktion, som sender ethvert prissystem $p = (p_1, \ldots, p_l)$ med $p_h > 0$, $h = 1, \ldots, l$, og indkomst $R > 0$ ind i et varebundt $x = h(p, R)$ med $p \cdot x = R$.

Hvis vi ønsker at opfatte $h(p, R)$ som en beskrivelse af forbrugerens adfærd på markedet ved priserne p og indkomsten R, må h opfylde visse betingelser. Betragt nemlig to pris-indkomst-kombinationer (p^0, R^0) og (p^1, R^1) og lad $x^0 = h(p^0, R^0)$, $x^1 = h(p^1, R^1)$ være de tilhørende funktionsværdier. Antag, at $p^0 \cdot x^1 \leq R^0$ og $x^0 \neq x^1$. Vi har da, at varebundtet x^1 kunne være købt i situation 0, men det blev ikke købt, det blev i stedet varebundtet x^0. Vi siger, at x^0 herved er afsløret bedre end x^1. Hvis relationen "afsløret bedre end" betegnes med $\mathcal{A}$, har vi

$$x^0 \,\mathcal{A}\, x^1 \iff \begin{cases} x^0 = h(p^0, R^0),\ x^1 = h(p^1, R^1) \\ x^0 \neq x^1,\ p^0 \cdot x^1 \leq R^0 \end{cases}$$

Hvis nu h skal beskrive en konsistent forbrugeradfærd, bør det gælde, at når x^0 er afsløret bedre end x^1, må x^1 ikke også kunne afsløres bedre end x^0. Det ville være tilfældet, såfremt $p^1 \cdot x^0 \leq R^1$, dvs. hvis varebundtet x^0 kunne være købt ved priserne p^1 og indkomsten R^1, hvor forbrugeren jo i stedet valgte x^1. Vort konsistenskrav bliver derfor

$$\left[p^0 \cdot h(p^1, R^1) \leq R^0 \text{ og } h(p^0, R^0) \neq h(p^1, R^1)\right] \Rightarrow p^1 \cdot h(p^0, R^0) > R^1.$$

Med notationen indført ovenfor kan vi formulere dette som

Det svage aksiom for afslørede præferencer: $x^0 \,\mathcal{A}\, x^1 \Rightarrow$ *ikke* $x^1 \,\mathcal{A}\, x^0$.

Relationen $\mathcal{A}$ skal altså være asymmetrisk.

3.6.3. Antag nu, at der er givet en række forskellige pris-indkomst-kombinationer $(p^0, R^0), (p^1, R^1), \ldots, (p^n, R^n)$ med tilhørende varebundter $x^0 = h(p^0, R^0)$, $x^1 = h(p^1, R^1), \ldots, x^n = h(p^n, R^n)$, således at $x^0 \,\mathcal{A}\, x^1, x^1 \,\mathcal{A}\, x^2, \ldots, x^{n-1} \,\mathcal{A}\, x^n$.

Vi siger da, at x^0 er indirekte afsløret bedre end x^n, og skriver $x^0\,\mathcal{A}^*\,x^n$. (Bemærk, at relationen $\mathcal{A}^*$ er transitiv). Det er rimeligt at skærpe konsistenskravet fra 3.6.2 til

> DET STÆRKE AKSIOM FOR AFSLØREDE PRÆFERENCER: $x^0\,\mathcal{A}^*\,x^n \Rightarrow$ *ikke* $x^n\,\mathcal{A}\,x^0$.

Denne forudsætning indeholder det svage aksiom (idet naturligvis $x^0\,\mathcal{A}\,x^1 \Rightarrow x^0\,\mathcal{A}^*\,x^1$) og medfører, at relationen $\mathcal{A}^*$ er asymmetrisk (overvej!).

3.6.4. Vi vender nu tilbage til efterspørgselsfunktionen ξ, udledt som i de foregående afsnit for en forbruger (X, S). Vi har set, at ξ (under forudsætning af F1 og F2) i hvert fald har følgende egenskaber:

(1) $p \cdot \xi(p, R) = R$ (3.3.6(ii))
(2) ξ er homogen af 0'te grad.

Videre er det let at se, at

(3) ξ opfylder det stærke aksiom.

Antag nemlig $x^0 \neq x^1$ og $p^0 \cdot x^1 \leq R^0$. Da x^0 er det entydigt bestemte (vi har jo en efterspørgselsfunktion) varebundt i $\gamma(p^0, R^0)$, som maksimerer S, må $S(x^0) > S(x^1)$. Hvis videre $x^1\,\mathcal{A}\,x^2, \ldots, x^{n-1}\,\mathcal{A}\,x^n$, har vi tilsvarende $S(x^1) > S(x^2), \ldots, S(x^{n-1}) > S(x^n)$. I alt fås $S(x^0) > S(x^n)$; der kan derfor ikke gælde $x^n\,\mathcal{A}\,x^0$, idet dette jo måtte betyde, at $S(x^n) > S(x^0)$, en modstrid.

3.6.5. Efterspørgselsfunktioner, udledt af nyttemaksimering, opfylder altså (1)-(3) i 3.6.4. Nok så bemærkelsesværdigt er det, at blot vi til (1)-(3) tilføjer en (svag) kontinuitetsbetingelse, er disse betingelser også tilstrækkelige. Der gælder nemlig følgende:

> *Hvis funktionen $h(p, R)$ opfylder (1)-(3) i 3.6.4 samt en kontinuitets-betingelse (mere præcist: en Lipschitz-betingelse), findes der en forbruger (X, S), hvis efterspørgselsfunktion netop er funktionen $h(p, R)$.*

Dette resultat (som skyldes Houthakker 1950) afklarer metodeproblemet, antydet i 3.6.1. Om man tager udgangspunkt i nyttemaksimering eller direkte i efterspørgselsfunktionen, kommer ud på ét (men vor fremgangsmåde har den fordel, at den kan bruges i andre sammenhænge end forbrugerens markedsadfærd). Desuden viser resultatet, at vi kan tjekke modellen ved at undersøge, om det stærke aksiom er opfyldt (jf. problematikken i 2.1.13).

3.7. Noter

3.7.1. Fremstillingen af forbrugsteorien er afpasset hensynet til de senere anvendelser, især ligevægtsteorien. Blandt de mange bøger om emnet kan nævnes Green (1971), Katzner (1970) og Lancaster (1971).

3.7.2. Et bevis for sætning 3.2.1 kan findes i Debreu (1959), kap. 4.

3.7.3. Beviset for kontinuitet af efterspørgselsfunktionen følger i hovedtrækkene Malinvaud (1972). Teknisk set er resultatet et specialtilfælde af den såkaldte Berges sætning (Berge (1959), kap. 6).

3.7.4. Der findes en omfattende litteratur om indeksproblemer. Se f.eks. Allen (1975).

3.7.5. Resultaterne om efterspørgselsfunktionens egenskaber under differentiabilitetsforudsætninger har i stor udstrækning været kendt siden slutningen af 1800-tallet.

3.8. Opgaver

3.8.1. Beregn marginalnytterne for hhv. gode 1 og gode 2 samt udtrykket for de marginale substitutionsforhold for følgende nyttefunktioner

$$(i)\ 2x_1 + 3x_2,\ (ii)\ 2\sqrt{x_1} + x_2,\ (iii)\ \ln x_1 + x_2,\ (iv)\ x_1 x_2,$$
$$(v)\ x_1^a x_2^b,\ (vi)\ (x_1+2)(x_2+1),\ (vii)\ x_1^a + x_2^b.$$

3.8.2. En forbrugers nyttefunktion er $S(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Tegn indifferenskurver for $S = 25$ og $S = 36$ i et (x_1, x_2)-diagram. Er de foretrukne mængder konvekse?

3.8.3. En forbrugers nyttefunktion ved forbrug af goderne 1 og 2 har udseendet

$$S(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Hvad er forbrugerens nyttemaksimerende forbrug, hvis prisen på gode 1 er $p_1 = 20$, prisen på gode 2 er $p_2 = 10$ og forbrugerens indkomst er $R = 200$?

(b) Bestem – gerne ved forskellige metoder – det generelle udtryk for forbrugerens efterspørgsel efter vare 1 og 2 som funktion af varepriserne p_1, p_2 og indkomsten R (forbrugerens efterspørgselsfunktion). Er vare 1 og 2 normale goder? Begrund.

3.8.4. Betragt forbrugeren (X, S), hvor $X = \mathbb{R}_+^2$ og

$$S(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2.$$

Løs forbrugerens problem (FP) for (a) $p = (1,1)$ og $R = 4$, (b) $p = (1,2)$ og $R = 20$, (c) $p = (3,1)$ og $R = 20$.

3.8.5. Udled efterspørgselsfunktionerne for vare 1 og 2, idet nyttefunktionen

$$S(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Bestem indkomst-, pris- og krydspriselasticiteten i efterspørgslen efter vare 1.

3.8.6. Betragt forbrugeren (X, S), hvor

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 > 0\}$$

og

$$S(x) = x_1 + \ln x_2.$$

(i) Løs forbrugerens problem (FP) for $R = 10$, $p_1 = 4$ og $p_2 = 2$.

(ii) Find et generelt udtryk for forbrugerens efterspørgselsfunktion.

(iii) Antag at forbrugeren i stedet har nyttefunktionen $S(x) = e^{x_1} x_2$. Hvorledes påvirkes i så fald resultatet fra spørgsmål (ii)? Forklar!

3.8.7 Betragt følgende nyttefunktion

$$S(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_l^{\alpha_l},\ \alpha_h > 0 \text{ for } h = 1, \ldots, l,\ \sum_{h=1}^{l} \alpha_h = 1,$$

hvor forbrugsmulighedsområdet er $X = \mathbb{R}^l_+$.

(a) Findes der for prissystemet $p = (0, 1, 1, \ldots, 1)$ og indkomsten $R = 1$ en løsning til forbrugerens problem?

(b) Findes der for prissystemet $p = (1, 1, \ldots, 1)$ og indkomsten $R = 0$ en løsning til forbrugerens problem?

(c) Find efterspørgselsfunktionen. Vis, at efterspørgselsfunktionen er homogen af grad 0 i priser og indkomst.

3.8.8. Betragt en forbruger karakteriseret ved forbrugsmulighedsområdet $X = \mathbb{R}^2_+$ og nyttefunktionen

$$S(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}.$$

(a) Find forbrugerens efterpørgselsfunktion for det tilfælde at $a = b$.

(b) Find forbrugerens efterspørgselsfunktion for det tilfælde, at a er forskellig fra b. (Vink: Indfør nogle nye variable $z_1 = ax_1$ og $z_2 = bx_2$ og anvend resultatet fra spørgsmål (a)).

4. Producenten

4.1. Produktionsmulighedsområdet

4.1.1. I dette kapitel vil vi i lighed med det foregående gå i detaljer med beskrivelsen af en vigtig type af agenter, her producenterne. Producentens rolle i vore modeller er, som ordet antyder, at gennemføre en produktion, dvs. at udvælge én produktionsplan blandt en række mulige efter et eller andet kriterium.

Dette kriterium vil ofte være profitmaksimering ved givne priser – men det behøver ikke at være det. Det viser sig nemlig hensigtsmæssigt at sondre mellem agenter, som gennemfører en produktion, og agenter, som i en eller anden forstand (f.eks. som ejere eller aktionærer) kontrollerer produktionsagenten (virksomheden). Vor producent er derfor ikke (nødvendigvis) en kapitalist i dette ords sædvanlige betydning – men kan være det, afhængig af modellens specificering i øvrigt.

4.1.2. Som tilfældet var for forbrugeren, vil vi starte med at beskrive de træk, som kendetegner producenten til vore formål, producentens karakteristika.

Producenten skal – som allerede nævnt – gennemføre en produktion. Helt generelt kan en bestemt produktion beskrives ved to varebundter, nemlig et varebundt $a = (a_1, \ldots, a_l)$ af input for alle de l varer (selv om mange af koordinaterne i a nok vil være 0) og et varebundt $b = (b_1, \ldots, b_l)$ af output. Der er ikke noget i vejen for, at en vare kan være såvel input som output – det klassiske eksempel er kulminen, som bruger kul til at drive hejseværket.

Det viser sig, at til vore formål er det nok at betragte nettoproduktionen

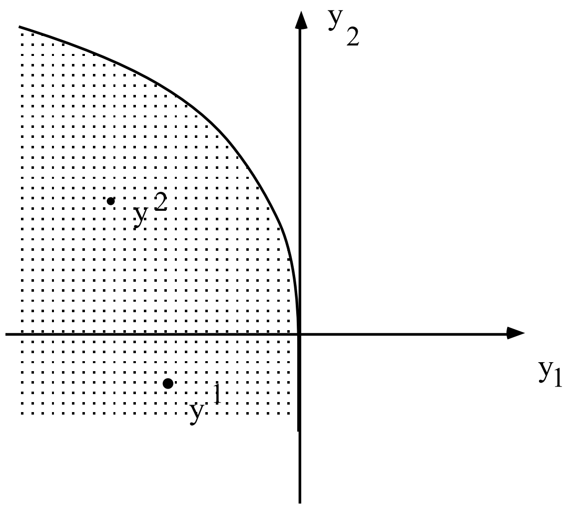
$$y = b - a$$

således at en *produktion* $y = (y_1, \ldots, y_l)$ er et varebundt, hvor h'te koordinat giver nettoproduktionen af vare h. Denne er negativ, hvis der bruges mere af vare h, end der frembringes, altså hvis h er et (netto-)input i produktionen, positiv, hvis h er et (netto-)output.

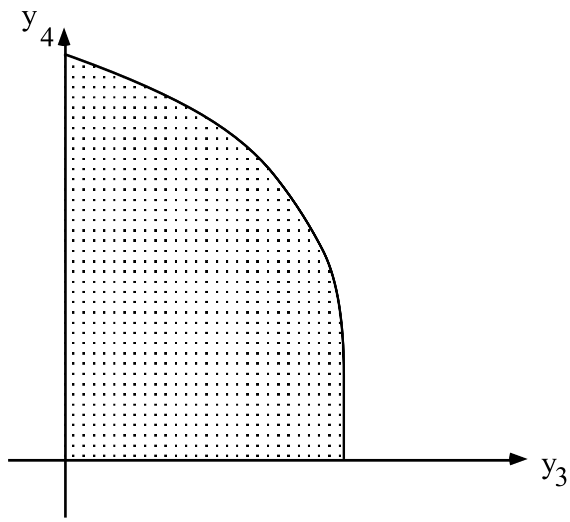
Vi kan nu karakterisere producenten ved en mængde Y af teknisk gennemførlige produktioner y. Y er således en delmængde af varerummet $\mathbb{R}^l$. Vi kalder Y for *produktionsmulighedsområdet.*

4.1.3. Hvis $l = 2$ kan Y afbildes direkte og kan f.eks. se ud som i Figur 4.1. Her er vare 1 altid input, vare 2 kan være både input (produktionen y^1) og output (y^2).

Hvis $l > 2$, er det naturligvis svært at afbilde hele produktionsmulighedsområdet. Men man kan da holde nogle varer på bestemte værdier og så indtegne alle de produktionsplaner, der passer hermed. Som eksempel kan vi antage $l = 4$,



Figur 4.1

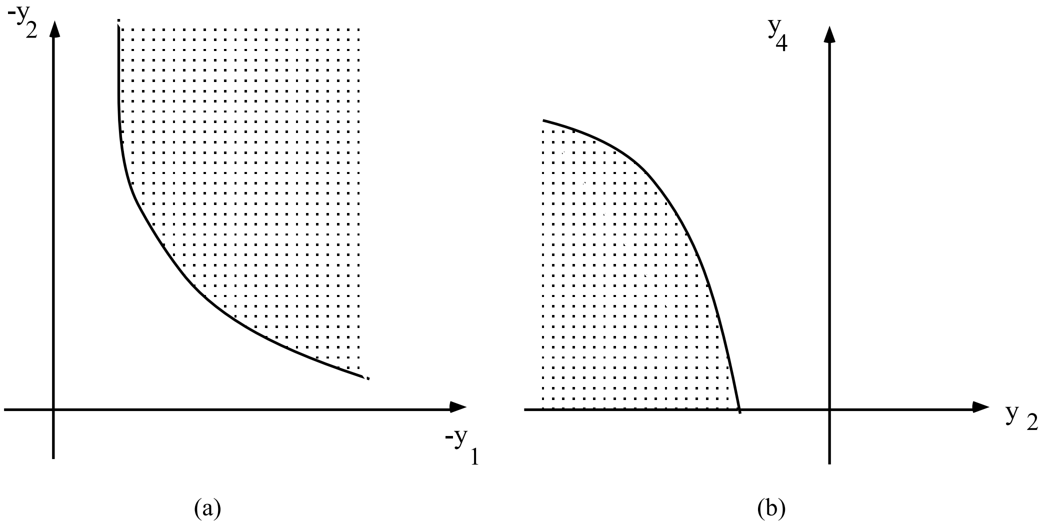


Figur 4.2

og at y_1, y_2 altid er input, y_3, y_4 altid output. Hvis vi vælger faste værdier af de to første varer, dvs. $y_1 = \bar{y}_1$, $y_2 = \bar{y}_2$, får vi en graf som vist i Figur 4.2. Randen af det prikkede område kaldes ofte en transformationskurve. Holdes y_3 og y_4 fast, får vi et billede som i Figur 4.3(a), og endelig viser Figur 4.3(b) situationen ved $y_1 = \bar{y}_1$, $y_3 = \bar{y}_3$.

4.1.4. Lad nu Y være et produktionsmulighedsområde og antag, at $y^1, y^2 \in Y$ er således, at $y^2_h \geq y^1_h$ for alle h, samt at der gælder $y^2_k > y^1_k$ for et vist k. Det betyder, at produktionsplanen y^2 giver mindst lige så meget (hvis h er en output-vare) eller bruger højst så meget (hvis h er en input-vare) som y^1 – og faktisk giver den mere (eller bruger mindre) af mindst én vare.

Hvis ikke producenten har en pervers interesse i at lade varer gå til spilde, må han være mere interesseret i y^2 end y^1. Med andre ord, han vil have ringe interesse i



Figur 4.3

produktioner $y^1 \in Y$, for hvilke der findes $y^2 \in Y$ med egenskaben ovenfor. Dette fører til indførelsen af begrebet *efficiente* produktioner.

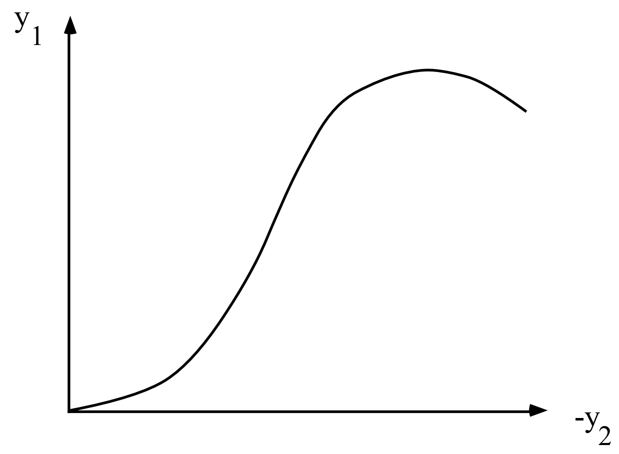
> *En produktion $y \in Y$ kaldes efficient, hvis der ikke findes $y' \in Y$, således at $y'_h \geq y_h$ for alle h og $y'_k > y_k$ for mindst ét k.*

4.2. Produktionsfunktioner

4.2.l. I visse situationer kan produktionsmulighedsområdet, der i 4.1.2. indførtes som en bestemt delmængde Y af varerummet $\mathbb{R}^l$, beskrives ved hjælp af en funktion. Grunden til, at en sådan beskrivelse har interesse, er (ligesom ved vores behandling af forbrugerens præferencerelation) at funktioner kan være nemmere at håndtere end abstrakte mængder. Dertil kommer, at beskrivelsen ved hjælp af en funktion undertiden er nok så intuitiv.

4.2.2. Et eksempel herpå er følgende: Lad $l = 2$ og antag, at y_2 er input af arbejdskraft, y_1 output af kartofler fra en mark af en given størrelse (eksemplet er hentet fra von Thünen 1850). Sammenhængen mellem arbejdsindsats og kartoffelhøst hævdes da at se ud som vist i Figur 4.4. (Bemærk, at da y_2 er input, må vi vende fortegnet for at afbilde funktionen i 1. kvadrant). Argumentationen for denne sammenhæng er i grove træk følgende: I starten, dvs. ved en lille indsats af arbejdskraft, vil udbyttet vokse mere end proportionalt med indsatsen f.eks. på grund af fordelene ved arbejdsdeling. Efterhånden som indsatsen af arbejdskraft øges, ændres billedet – og med tilstrækkelig mange arbejdere falder udbyttet (de træder kartoflerne i stykker, holder faglige møder osv.).

Klart nok kan den illustrerede sammenhæng beskrives ved en funktion $y_1 = g(y_2)$. Tager vi også den mulighed med, at man kunne lade noget af output ligge



Figur 4.4

tilbage på marken, får vi, at produktionsmulighedsområdet er

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq g(y_2)\}.$$

4.2.3. I eksemplet ovenfor var der kun ét input. Der er ikke noget i vejen for, at der kunne være flere. Hvis således y_1 er output, $y_2, \ldots, y_l$ input, kan produktionsmulighedsområdet være givet ved

$$Y = \{(y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \mid y_1 \leq g(y_2, \ldots, y_l)\},$$

hvor $g : \mathbb{R}^{l-1} \to \mathbb{R}$, som kaldes produktionsfunktionen, angiver, hvor meget output man maksimalt kan opnå ved indsatsen $y_2, \ldots, y_l$ af de $l - 1$ input-varer.

4.2.4. Hvis der i produktionsprocessen er mere end ét output (og det vil jo i almindelighed være tilfældet), kan vi ikke bruge produktionsfunktioner af typen ovenfor. Man kan imidlertid ofte alligevel beskrive Y ved en produktionsfunktion (af mere abstrakt karakter). Generelt vil vi derfor sige, at

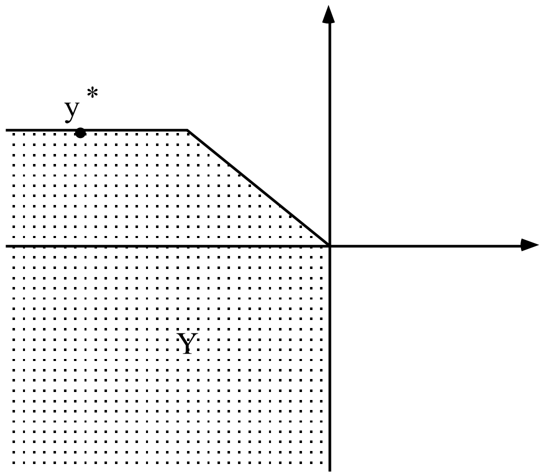
produktionsmulighedsområdet Y kan beskrives ved en produktionsfunktion, hvis der findes en C^1-funktion $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, således at

$$f(y) \leq 0 \Leftrightarrow y \in Y,$$
$$\textit{og } f(y) = 0 \Leftrightarrow y \textit{ er efficient.}$$

(At f er en C^1-funktion betyder (jf. 3.2.7), at f er differentiabel med kontinuerte partielle afledede).

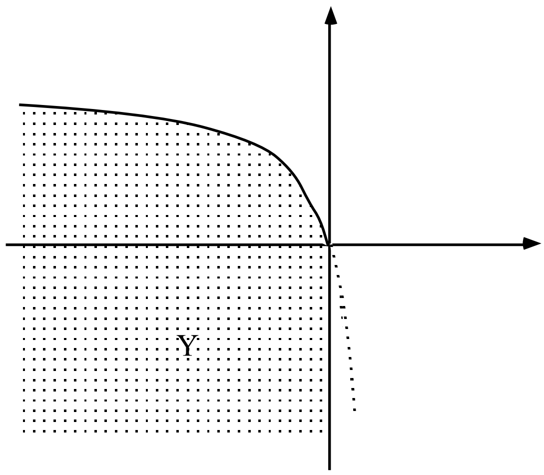
I denne generelle formulering er produktionsfunktionen altså blot et værktøj ved analysen: Givet et varebundt $y \in \mathbb{R}^l$ kan vi finde ud af, om $y \in Y$ (og om y er efficient), ved at udregne $f(y)$.

4.2.5. Ikke alle produktionsmulighedsområder kan beskrives ved en produktionsfunktion. Et eksempel er produktionsmulighedsområdet i Figur 4.5. Hvis der nemlig findes en funktion f, som beskriver Y, må vi i hvert fald have $f(y) \leq 0$ for alle y i det prikkede område. Omvendt må vi have $f(y) > 0$, hvis y ikke ligger i produktionsmulighedsområdet. Da f skal være kontinuert, må der derfor gælde, at $f(y^*) = 0$. Men så skulle y^* være efficient – og det er forkert.



Figur 4.5

4.2.6. Et andet eksempel på et produktionsmulighedsområde, der – med vor definition fra 4.2.4 – ikke kan beskrives ved en produktionsfunktion, er givet i Figur 4.6.



Figur 4.6

Bemærk, at vi her kan opfatte Y som en fællesmængde af den noget større mængde Y' (alt under kurven) og mængden af vektorer med 1. koordinat ≤ 0. Økonomisk set er Y altså givet ved et produktionsmulighedsområde Y', der kan beskrives ved en produktionsfunktion, samt fortegnsrestriktioner for en eller flere variable, svarende til at de pågældende varer kun kan være input (som vare 1 i eksemplet) eller output.

For de fleste anvendelser vil en sådan beskrivelse af Y ved produktionsfunktion $+$ fortegnsrestriktioner være lige så brugbar som beskrivelse ved produktionsfunktion alene.

4.2.7. En af fordelene ved produktionsfunktioner er, at de kan benyttes til marginalbetragtninger. Lad nemlig y være en efficient produktionsplan, dvs. $f(y) = 0$, og betragt en lille ændring $dy = (dy_1, \ldots, dy_l)$, der er således, at den nye produktionsplan $y + dy$ stadig er efficient. Vi har da

$$0 = df = \sum_{h=1}^{l} f'_h \, dy_h,$$

og hvis ydermere kun dy_h og dy_k er $\neq 0$, fås

$$-\frac{dy_h}{dy_k} = \frac{f'_k}{f'_h}.$$

Venstre side kaldes *det marginale substitutionsforhold* i produktionen.

Vi kan illustrere vektoren $f' = (f'_1, \ldots, f'_l)$ af partielle afledede i et efficient punkt y som en vektor stående vinkelret på tangentfladen til $\{y \mid f(y) = 0\}$ i y. Vektoren peger væk fra Y, idet der gælder $f'_h \geq 0$ for alle h: Lad e_h være den h'te enhedsvektor og $\lambda \in [0, 1]$. Da y er efficient, er $f(y + \lambda e_h) > 0$, og følgelig er

$$f'_h(y) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f'_h(y + \lambda e_h)}{\lambda} \geq 0.$$

4.3. Forudsætninger om produktionsmulighedsområdet

4.3.1. Ligesom under vor behandling af forbrugeren vil vi få brug for, at produktionsmulighedsområdet Y ikke er en helt vilkårlig delmængde af varerummet $\mathbb{R}^l$, men opfylder visse – mere eller mindre intuitive – betingelser.

FORUDSÆTNING P1: *Om produktionsmulighedsområdet Y gælder:*

(a) $0 \in Y$,

(b) Y *er afsluttet,*

(c) Y *er konveks,*

(d) $Y \cap (-Y) = \{0\}$,

(e) hvis $y^1 \in Y$ *og* $y^2 \in \mathbb{R}^l$ *er således, at* $y^2_h \leq y^1_h$, $h = 1, \ldots, l$, *da er* $y^2 \in Y$.

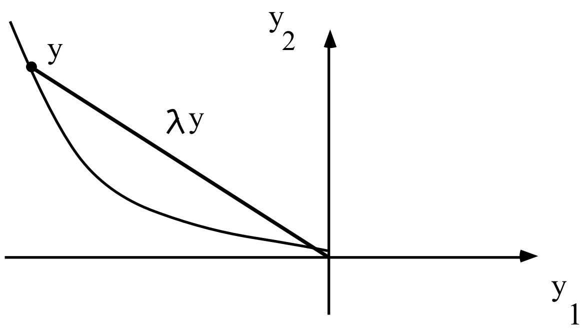
4.3.2. Betingelsen (a) i P1 siger, at den produktionsplan, der består i intet at foretage sig, er mulig. Er det en rimelig antagelse? Hvis der i virksomheden er et fast anlæg, må man formodentlig afholde visse omkostninger til dets vedligeholdelse, også selv om der ikke produceres.

Her bør man erindre, at vore varer er daterede (jf. 1.3.8), så produktionsplanen 0 betyder, at man overhovedet ikke anskaffer et fast anlæg. Med denne fortolkning af varerne bliver (a) således ret uskyldig.

Om (b) gælder (ligesom i 3.1.5), at det er en forudsætning af "analyseteknisk" karakter.

4.3.3. Konveksitetsantagelsen (c) er straks mere tvivlsom. Dels implicerer den, at alle varer er delelige, hvilket vi endda kan acceptere som en tilnærmelse. Men der ligger mere end det i antagelsen.

Lad $y \in Y$ være en vilkårlig produktionsplan forskellig fra 0. Hvis (c) er opfyldt, må $\lambda y \in Y$ for alle λ med $0 \leq \lambda \leq 1$. Dette udelukker i hvert fald produktionsmulighedsområder af typen vist i Figur 4.7, hvor der er voksende skalaafkast (output stiger mere end proportionalt med input).



Figur 4.7

Når vi i det følgende vil antage (c) opfyldt, skyldes det ikke, at vi mener, at man kan se bort fra situationer med voksende skalaafkast. De resultater, vi når frem til, vil blot ikke dække sådanne situationer. Der skal i vidt omfang en anden teori til.

4.3.4. Betingelsen (d), som kaldes *irreversibilitet i produktionen,* siger, at hvis $y = (y_1, \ldots, y_l) \in Y$, da vil produktionsplanen $-y = (-y_1, \ldots, -y_l)$, hvor alt, hvad der var input i y, er output (og omvendt), *ikke* ligge i Y, medmindre naturligvis $y = 0$ (mængden $-Y$ består af alle elementer i Y med modsat fortegn). Produktionsprocessen kan altså ikke vendes om.

Endelig siger (e), at en produktionsplan, der giver mindre output og/eller bruger mere input end en mulig produktionsplan, selv vil være mulig. Dette vil i hvert fald være opfyldt, hvis man kan smide væk uden omkostninger.

4.4. Et specialtilfælde: Konstant skalaafkast

4.4.1. En særlig type af produktionsmulighedsområder er dem, som opfylder følgende

FORUDSÆTNING P2 *(konstant skalaafkast): Hvis* $y \in Y$ *og* $\lambda \geq 0$, *da er* $\lambda y \in Y$.

Konstant skalaafkast er en implicit antagelse bag skolebøgernes regnestykker (når A graver 2 m grøft på 4 timer, hvor meget graver han så på 17 timer?) og kogebøgernes opskrifter (der kun fortæller, hvorledes man kan producere én sandkage og overlader det til husmoderen at gange op, hvis hun skal bruge 24 sandkager). Det vil også vise sig at være en nyttig antagelse i nogle af vore modeller senere hen.

At den ikke kan antages generelt opfyldt, har vi allerede noteret os i 4.2.2. Der kan argumenteres for, at når den ikke holder, skyldes det som regel, at man har "glemt" et eller andet relevant input (jorden i vort eksempel). Men det kan naturligvis ikke afgøres a priori.

4.4.2. Betragt nu et produktionsmulighedsområde Y, der opfylder P2, og således at der kun er én vare (lad os sige vare nr. 1), som er output. For en vilkårlig produktionsplan $y \in Y$ med $y_1 \neq 0$ kan vi da finde ud af, hvor meget input af hver vare h, der bruges pr. enhed output, nemlig y_h/y_1. Hvis vi sætter $a_h = -(y_h/y_1)$, $h = 2, \ldots, l$, får vi en vektor $a = (0, a_2, \ldots, a_l)$. En sådan vektor kaldes en *proces* (eller aktivitet). Den oprindelige produktionsplan y får vi da frem ved at *operere processen* a *på niveau* y_1 (dvs. ved at gange hver af inputkoefficienterne a_h med y_1 – og skifte fortegn ifølge vor fortegnskonvention).

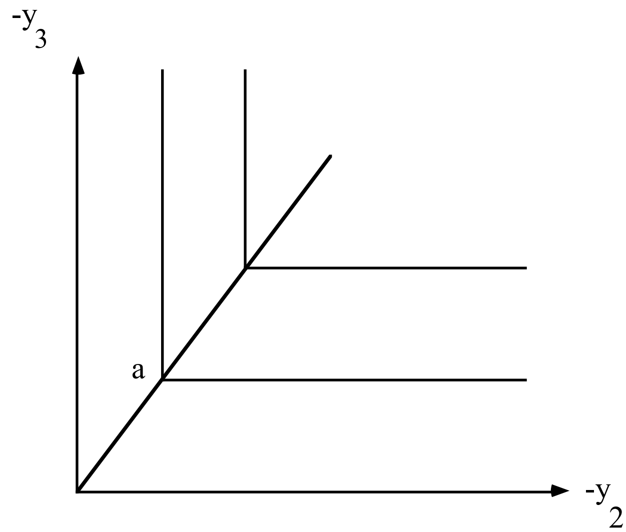
Fra Y kan vi således aflede én eller flere processer, og tilsvarende kan vi, hvis vi har en mængde A af processer, aflede det tilhørende produktionsmulighedsområde.

4.4.3. Hvis der kun er én proces, kan vi (for $l = 3$) afbilde situationen som vist i Figur 4.8. Processen (her $(0, 1, 1)$) svarer til punktet a. De to input skal her indsættes i forholdet 1:1. Hvis man i punktet a for givet y_2 øger indsatsen af y_3, vokser produktionen ikke (en sådan produktionsproces kaldes limitational).

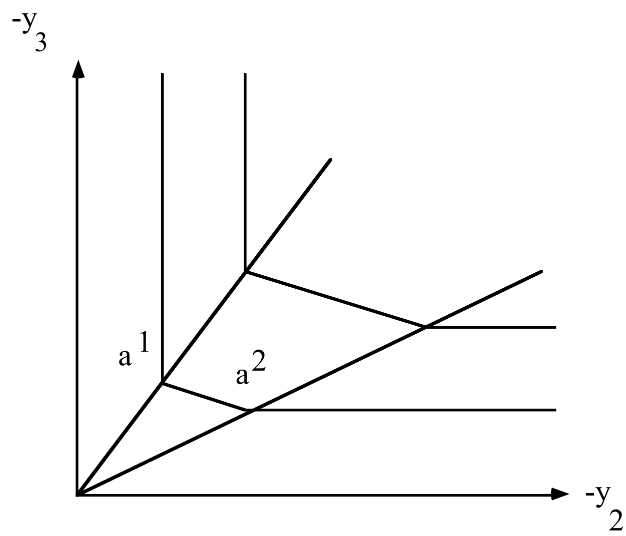
4.4.4. Hvis der er to processer, kan det afbildes som vist i Figur 4.9. For at producere én enhed output kan producenten enten operere processen a^1 på niveau 1 eller a^2 på niveau 1, eller han kan operere a^1 på niveau λ og a^2 på niveau $1 - \lambda$ for $0 < \lambda < 1$. Derved fås de stykkevis lineære isokvanter på figuren.

4.5. Producentens markedsadfærd

4.5.1. Vi har nu diskuteret producentens karakteristika (nemlig Y), som er det, der er typisk for producenten, karakteriserer ham, i vore modeller. I det følgende vil vi



Figur 4.8



Figur 4.9

betegne producenten med Y; hvis der i vores model er flere producenter, f.eks. n, vil vi skrive den j'te producent som Y_j, $j = 1, \ldots, n$.

Lad os dernæst se på producentens adfærd i et givet institutionelt set-up, nemlig det, hvor der er givet et marked af typen M_p for et prissystem $p \in \mathbb{R}^l$ (jf. 1.4.5 og 3.3.2).

Producenten kan i denne situation købe sit input og sælge sit output på markedet. Hvis produktionsplanen (som i 4.1.2) er givet ved input $a \in \mathbb{R}^l$ og output $b \in \mathbb{R}^l$, opnås herved en profit (positiv eller negativ)

$$p \cdot b - p \cdot a = p \cdot (b - a) = p \cdot y,$$

hvoraf vi ser, at for profittens størrelse er kun nettoproduktionen y af betydning.

4.5.2. Hvilken adfærd kan vi nu forvente af producenten Y i denne situation? Én mulighed er, at producenten søger en produktionsplan $y^0 \in Y$, der maksimerer profitten $p \cdot y$ blandt alle mulige produktionsplaner $y \in Y$, dvs. at han søger en løsning til

PRODUCENTENS PROBLEM (PP): *Find* $y^0 \in Y$*, således at* $p \cdot y \leq p \cdot y^0$ *for alle* $y \in Y$*.*

Det er imidlertid slet ikke oplagt, at dette er producentens adfærd. Man vil måske hævde, at stræben efter maksimal profit er et iboende dyrisk instinkt hos kapitalisten. Men vor producent er ikke nødvendigvis en kapitalist – vi har indtil videre ikke sagt noget om, hvem der kontrollerer ("ejer") virksomheden og hvordan.

Profitmaksimering er således kun én blandt mange mulige former for producentadfærd.

4.5.3.* For at illustrere, at der faktisk er andre muligheder, vil vi diskutere et par eksempler:

(a) Arbejderstyrede virksomheder. Antag, at det er fastsat, at virksomhedens overskud tilfalder de ansatte arbejdere. Lad os endvidere (for simpelheds skyld) antage, at der kun er én type arbejdskraft (den l'te vare), og at arbejdsstyrken i virksomheden er fast, således at kun arbejdstiden kan varieres. En oplagt adfærd vil da være at maksimere profit pr. arbejdstime, dvs. at vælge en produktionsplan $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_l^0)$ således at

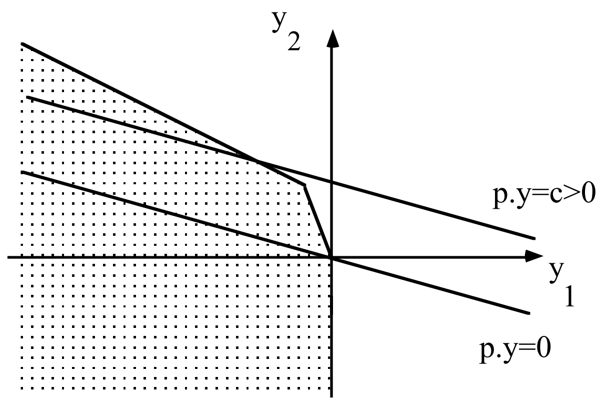
$$\frac{\sum_{h=1}^{l-1} p_h y_h^0}{-y_l^0} \geq \frac{\sum_{h=1}^{l-1} p_h y_h}{-y_l}$$

for alle $y = (y_1, \ldots, y_l) \in Y$.

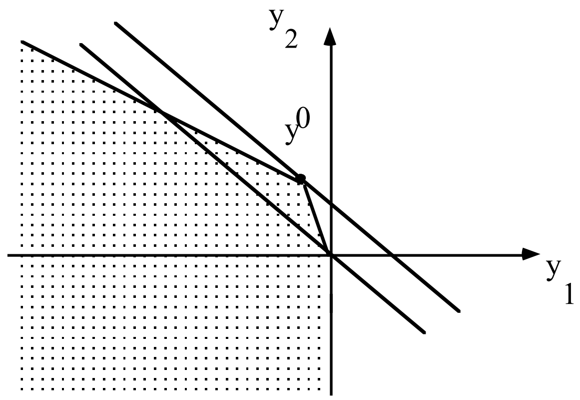
(b) Planøkonomi. Antag, at virksomhederne ejes af staten, og der til virksomheden opgives en række planmål: Det kan være producerede mængder af visse varer (her nr. 1 og 2) c_1, c_2, krav om at virksomheden foretager visse investeringer (altså bestemte input, her af vare nr. 3 og 4) d_3, d_4, opnår en vis profit e og en bestemt arbejdsproduktivitet f. Af den opnåede profit går en vis andel t til staten, resten til en fond, som virksomhedens medarbejdere kan disponere over. Virksomhedens målsætning bliver da at maksimere $(1-t)p \cdot y$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned}
&y \in Y,\ y_1 \geq c_1,\ y_2 \geq c_2,\\
&y_3 \leq -d_3,\ y_4 \leq -d_4,\ p \cdot y \geq e \text{ samt}\\
&\frac{\sum_{\{h:y_h>0\}} p_h y_h}{-y_l} \geq f.
\end{aligned}$$

4.5.4. Vi vil nu vende tilbage til PP, altså forudsætte profitmaksimering som virksomhedens adfærd. For at følge vor etablerede tradition bør vi undersøge (1) om



Figur 4.10



Figur 4.11

der findes løsninger til PP, (2) om løsningen er entydigt bestemt, og (3) hvorledes den varierer med udgangsbetingelserne (her prissystemet p).

Situationen er imidlertid den, at der ofte slet ikke er løsninger til PP. Dette ses bedst af en figur, se Figur 4.10.

For et givet prissystem p kan vi indtegne isoprofitflader (for $l = 2$ isoprofitlinjer), der består af alle punkter med samme profit. For $l = 2$ bliver det linjer med hældning $-(p_1/p_2)$. Generelt er det sådanne hyperplaner, på hvilke prisvektoren er vinkelret. Fladen (linjen) gennem 0 svarer til profitten 0.

I figuren vil man til stadighed kunne øge profitten ved at bevæge sig mod nordvest. Der er derfor ikke noget maksimum.

På den anden side er der andre prissystemer, for hvilke der findes et maksimum, se Figur 4.11.

4.5.5. Også spørgsmålet om entydighed giver negativt svar. En illustration af dette får vi af følgende lille sætning, som også vil være nyttig i anden sammenhæng:

Antag, at Y opfylder P2, og lad $p \in \mathbb{R}^l_+$ være et prissystem. Da er der enten ingen, én eller uendelig mange løsninger til PP, og for enhver løsning y^0 er $p \cdot y^0 = 0$.

BEVIS: Da $0 \in Y$, må der for en eventuel løsning y^0 i hvert fald gælde $p \cdot y^0 \geq 0$. Antag, at der findes $y \in Y$ med $p \cdot y > 0$. Da vil for ethvert tal λ også $\lambda y \in Y$, og $p \cdot (\lambda y) = \lambda p \cdot y$. Profitten kan således blive vilkårligt stor, dvs. der er ingen løsning til PP. Hvis der derfor er løsninger, må profitten være 0. Altså er $y = 0$ en løsning. Hvis der er andre, f.eks. $y^0 \neq 0$, vil også λy^0 for alle $\lambda > 0$ være løsning, og der er da uendelig mange. □

4.5.6. Vi har således fundet ud af, at der for et givet prissystem p ikke nødvendigvis er løsninger til PP, og at løsningen, såfremt den eksisterer, ikke nødvendigvis er entydigt bestemt. Punkt (3) i vort program (4.5.4) vil vi i lyset af disse resultater udelade.

4.5.7. Lad os nu antage prissystemet p valgt således, at der er i hvert fald én løsning y^0 til PP. Vi har da

Hvis $y^0 \in Y$ løser PP ved prissystemet p med $p_h > 0$, $h = 1, \ldots, l$, da er y^0 efficient.

Beviset er ligetil og overlades til læseren.

Hvis Y kan beskrives ved en produktionsfunktion f (jf. 4.2.4), kan PP derfor omformuleres til

$$\begin{aligned}&y^0 \text{ maksimerer } p \cdot y\\&\text{under bibetingelsen } f(y) = 0.\end{aligned}$$

Vi kan således benytte det generelle resultat om maksimering under bibetingelser: y^0 må være ekstremumspunkt (dvs. alle partielle afledede er 0) for Lagrange-funktionen

$$L(y, \mu) = \sum_{h=1}^{l} p_h y_h + \mu f(y_1, \ldots, y_l),$$

hvoraf vi får, at y^0 er en løsning til ligningssystemet

$$(*) \qquad \begin{aligned} p_h + \mu f'_h &= 0, \ h = 1, \ldots, l, \\ f(y_1, \ldots, y_l) &= 0. \end{aligned}$$

Betragtes specielt h'te og k'te ligning, får vi heraf

$$\frac{p_h}{p_k} = \frac{f'_h}{f'_k},$$

så *prisforholdet er lig det marginale substitutionsforhold i produktionen.*

4.5.8. Vi har nu set, at en løsning til PP er en løsning til et bestemt ligningssystem, nemlig (*) i 4.5.7. Under en ekstra forudsætning kan vi også ræsonnere den anden vej:

*Antag, at Y opfylder P1, og at $p_h > 0$, $h = 1, \dots, l$. Hvis y^0 er en løsning til ligningssystemet (*) for et vist $\mu \neq 0$, da er y^0 en løsning til PP.*

BEVIS: Lad y^0 være en løsning til systemet (*). Da er $y^0 \in Y$. Vælg $y \in Y$ vilkårlig. Vi skal vise, at $p \cdot y \leq p \cdot y^0$. Hertil betragter vi funktionen

$$h(t) = f(ty + (1-t)y^0),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Dette er en differentiabel funktion af én variabel t, og vi har

$$\frac{h(t) - h(0)}{t} = \frac{f(ty + (1-t)y^0) - f(y^0)}{t} \leq 0,$$

idet $ty + (1-t)y^0 \in Y$ (P1) og $f(y^0) = 0$. Altså er $h'(0) \leq 0$. Udregnes nu $h'(0)$ ved hjælp af kædereglen, fås

$$h'(0) = \sum_{h=1}^{l} f'_h(y_h - y_h^0) = \sum_{h=1}^{l} \left(-\frac{1}{\mu}\right) p_h(y_h - y_h^0) \leq 0.$$

Da y^0 er efficient, er $f'_h \geq 0$ for $h = 1, \dots, l$. Derfor er $-1/\mu > 0$ og kan forkortes væk. Tilbage bliver

$$\sum_{h=1}^{l} p_h(y_h - y_h^0) \leq 0$$

eller $p \cdot y \leq p \cdot y^0$ som ønsket. □

4.5.9. Til afslutning vil vi vise et lille komparativ-statisk resultat:

Lad Y være en producent og y^0, y^1 løsninger til PP ved prissystemerne p^0 og p^1. Da gælder

$$(p^0 - p^1) \cdot (y^0 - y^1) \geq 0.$$

BEVIS: Da y^0 løser PP ved p^0, har vi

$$p^0 \cdot y^0 \geq p^0 \cdot y^1, \tag{1}$$

og da y^1 løser PP ved p^1, er $p^1 \cdot y^1 \geq p^1 \cdot y^0$ eller

$$-p^1 \cdot y^0 \geq -p^1 \cdot y^1. \tag{2}$$

Adderes (1) og (2), får vi

$$(p^0 - p^1) \cdot y^0 \geq (p^0 - p^1) \cdot y^1$$

eller

$$(p^0 - p^1) \cdot (y^0 - y^1) \geq 0. \qquad \square$$

Hvis alle priser på nær den h'te er ens i situation 0 og 1, får vi, at

$$(p_h^0 - p_h^1)(y_h^0 - y_h^1) \geq 0.$$

Det vil sige, at hvis prisen stiger ($p_h^1 > p_h^0$) kan den udbudte mængde ikke falde ($y_h^0 \leq y_h^1$).

4.6. Måling af efficiens

4.6.1. I det foregående afsnit har vi indført begrebet 'efficient produktion'. Det er oplagt, at efficiens af produktionen vil være en ønskværdig egenskab næsten uanset de konkrete forhold, herunder om den betragtede virksomhed er privat eller offentlig. Men hvordan sikrer man sig, at produktionen bliver efficient?

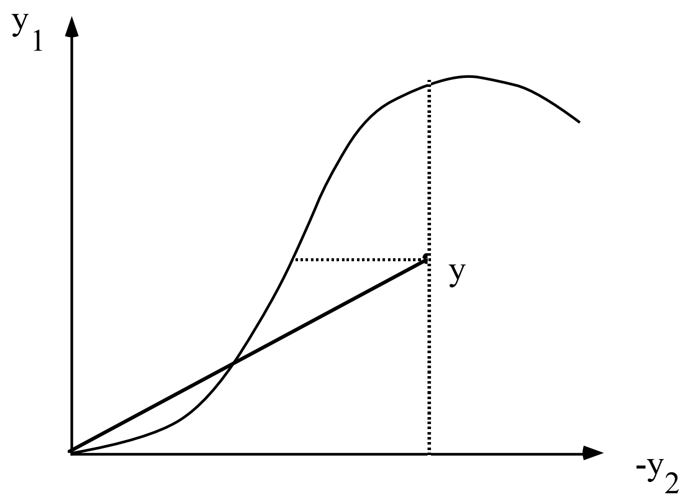
Et hurtigt svar på dette spørgsmål vil være, at med passende institutioner i samfundet vil efficiens komme af sig selv, som en følge af andre egenskaber ved valget af produktionsplan (således f.eks. at produktionen vælges således at den maximerer profitten ved givne priser). Det er ikke sikkert, at ledelsens interesse i at vælge en efficient produktion også automatisk fører til, at der vælges en sådan, men lad nu det ligge. Her vil vi i stedet se lidt nærmere på, hvordan man kan måle efficiens som et første skridt til at sikre, at den valgte produktion får denne egenskab.

Egentlig er det uheldigt at tale om måling af efficiens, for efficiens er jo en egenskab, som produktionen enten har eller ikke har, og vi vil gerne vide noget om, hvor meget der mangler i at opnå efficiens, hvis vi ikke har denne egenskab, med andre ord, vor diskussion handler om måling af graden af opfyldelse af efficiensmålsætningen. Det er nemmere bare at tale om måling af efficiens, så det gør vi.

4.6.2. Hvis der er givne priser på både input og output, vil man kunne få et mål for efficiensen af en produktion $y = (y_1, \ldots, y_l)$ ved at opgøre værdi af output i forhold til værdi af input, dvs.

$$\frac{\sum_{h=1}^{l} p_h \text{max}\,\{0, y_h\}}{-\sum_{h=1}^{l} p_h \text{min}\,\{y_h, 0\}}$$

og sammenligne denne værdi ("produktiviteten") for den konkrete produktion y med enten den maksimalt opnåelige med samme input eller samme output (se Figur 4.12; produktiviteten fremkommer som hældningen på strålen op til y). Dette er faktisk helt normal procedure i de fleste virksomheder.



Figur 4.12

Hvis vi analyserer proceduren lidt nærmere, ser vi at der egentlig sker *to* ting, nemlig (1) valg af referenceproduktion ("benchmark") og (2) måling af afstand fra denne referenceproduktion. Det kan vi bygge videre på i den mere komplicerede situation, hvor der ikke er givne priser på f.eks. output.

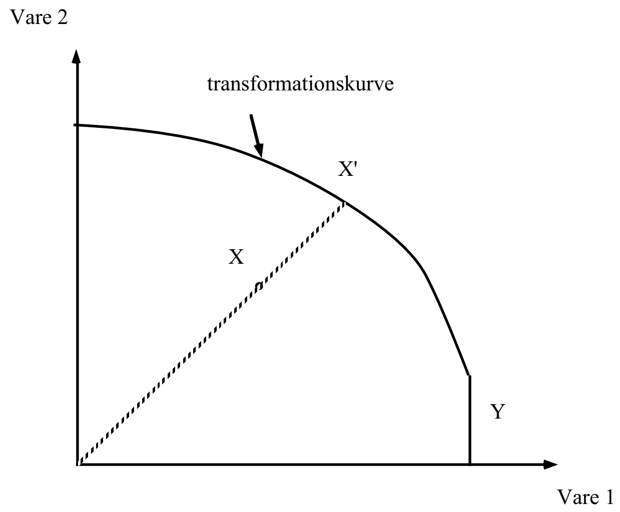
4.6.3. I figur 4.13 ses transformationskurven hørende til et givet input (eller i praksis: alle de output der kan fås ved et bestemt kronebeløb som samlede omkostninger). Punktet x er ikke efficient; et bud på, hvorledes man faktisk kan måle efficiens af punktet, er det, som er vist i figuren: Man fortsætter strålen op til skæring med transformationskurven, hvorved man får referenceproduktionen eller benchmark, og graden af efficiens måles da som den andel af stykket ud til benchmark, som afsættes af x, dvs.

$$E_F(x) = \min\{\lambda \mid \lambda^{-1}x \in Z\}.$$

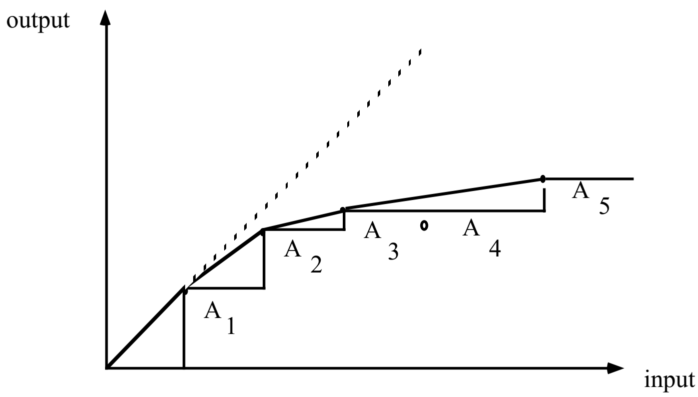
Dette efficiensmål kaldes *Farrell*-målet for (teknisk) efficiens og er brugt meget ved produktivitetsanalyser i f.eks. offentlig aktivitet, hvor output ikke sælges på et marked og ofte ikke kan prissættes (således som produktionen i sygehuse, politistationer, universiteter osv.).

4.6.4. Ved praktisk anvendelse af denne form for produktivitetsmåling står man imidlertid over for endnu et problem, nemlig *fastlæggelse af produktionsmuligheds-området.* Det kender man jo normalt ikke umiddelbart, så man må rekonstruere det ud fra data. En måde (blandt flere) at gøre det på er at benytte den såkaldte DEA (Data Envelopment Analysis) metode. Vi illustrerer metoden ved at se på et helt simpelt tilfælde med bare et input og et output.

Udgangspunktet for rekonstruktionen er en række empiriske data om input-output-kombinationer (x_i, y_i). Indekset i løber over de n observationer, som er til rådighed; observationerne kan stamme fra tidsserier, således at de repræsenterer faktisk gennemførte produktioner, eller det kan være gennemførte produktioner i en række produktionsenheder, der opfattes som ensartede. For at lette fremstilligen



Figur 4.13



Figur 4.14

er input her regnet positivt.

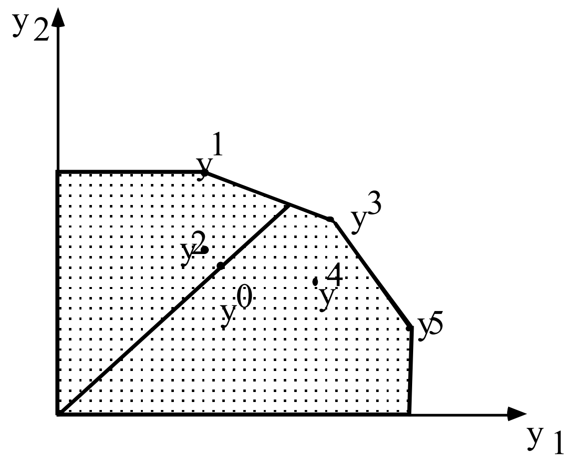
4.6.5. Lad $D = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ være data. I Figur 4.14 er data givet som punkterne $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Under vor antagelse må der gælde $(x_i, y_i) \in Y$, alle i, hvor $Y \subset \mathbb{R}^2_+$ er det teoretiske produktionsmulighedsområde. Så længe vi ikke antager andet og mere, har vi blot n punkter fra Y, hvilket er lidt vel småt. Der må derfor yderligere antagelser til.

Her kan man ikke afgøre på forhånd, hvilke slags antagelser der kan gøres, og hvilke, der er for vidtgående; det afhænger af éns a priori viden. Den mest uskyldige må nok siges at være P1(a):

$0 \in Y$ *(mulighed for inaktion).*

Taget isoleret giver denne antagelse os ikke særlig meget, nemlig blot et punkt mere. Vi går derfor videre.

4.6.6. Den næste antagelse om produktionsmulighedsområdet Y, som vi vil gøre, er P1(e). Her vil det betyde følgende:



Figur 4.15

Hvis $(x_i, y_i) \in D \cup \{0\}$ *og* $x \geq x_i$, $0 \leq y \leq y_i$, *da er* $(x, y) \in Y$.

Hvis vi til de observerede punkter føjer alle dem, der følger fra anvendelsen af P1(a) og P1(e), får vi det såkaldte "free-disposal-hull" (eller "comprehensive hull") af $D \cup \{0\}$, som betegnes $H(D \cup \{0\})$ (se Figur 4.14).

På dette niveau i analysen kan vi allerede bruge resultatet: Hvis en virksomheds data befinder sig i $H(D \cup \{0\})$, kan vi angive en anden virksomhed, som har klaret sig bedre end (som *dominerer*) den pågældene. I Figur 4.14 er virksomhed 4 en sådan figur; punktet A_4 er domineret af A_3.

4.6.7. Hvis vi også tilføjer antagelsen P1(c) om konveksitet, har vi foruden de observerede punkter og deres free-disposal-hull også alle konvekse kombinationer af punkter i denne mængde:

Hvis $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in H(D \cup \{0\})$ *og* $\lambda \in [0, 1]$, *da er* $\lambda(x^1, y^1) + (1 - \lambda)(x^2, y^2) \in Y$.

Denne antagelse giver os det mindste produktionsmulighedsområde indeholdende vore data, som opfylder P1(a),(c) og (e), se Figur 4.14.

4.6.8. Hvis vi til de foregående antagelser yderligere tilføjer P2 (konstant skalaafkast), fås en yderligere udvidelse af det teoretiske produktionsmulighedsområde rekonstrueret fra data (nemlig alt under den punkterede linje).

Et eksempel på en analyse gennemført i en situation med to output er vist i Figur 4.15.

4.6.9. Den grafiske illustration af DEA som kombination af (a) rekonstruktion af teoretisk produktionsmulighedsområde fra data og (b) beregning af efficiensmål svarer ikke helt til, hvordan det gøres i praksis, hvor resultatet kommer ud som løsning af et enkelt optimeringsproblem. Der findes færdigudviklet software til dette, f.eks. EMS.

Produktivitetsmåling ved DEA har som nævnt været brugt ved undersøgelser af sygehuse, posthuse, politistationer osv. Generelt kræver metoden, at der er tilstrækkelig mange observationer i relation til antallet af outputvariable, idet det ellers bliver for let for den enkelte virksomhed at fremstå som efficient.

4.7. Noter

4.7.1. I behandlingen af de tekniske produktionsforhold er der – af hensyn til vore senere anvendelser – tilstræbt så stor generalitet som muligt. Fremstillingen følger her Debreu (l959). Specielle funktionsformer for produktionsfunktioner (til brug f.eks. ved empiriske undersøgelser) og sammenhængen med omkostningsfunktioner er ikke berørt. Der henvises til f.eks. Shephard (1970).

4.7.2. Den lineære produktionsmodel, introduceret i 4.4, er grundigt behandlet i litteraturen, således f. eks. Koopmans (1951), og studiet af denne model var med til at bane vejen for den moderne ligevægtsteori.

4.8. Opgaver

4.8.1. En virksomhed har produktionsmulighedsområdet

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 \leq 0,\, y_1 \leq \sqrt{a(-y_2)}\}$$

for $a > 0$.

Find virksomhedens udbudsfunktion.

4.8.2. Betragt produktionsmulighedsområdet

$$Y = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2 \leq 0,\, y_3 \leq 0,\, y_1 \leq \sqrt{(-y_2)(-y_3)}\}.$$

(a) Vis, at Y tilfredsstiller betingelsen P2.

(b) Betragt et givet output af vare 1, f.eks. $\bar{y}_1 = 2$, og skitsér, hvilke input (y_2, y_3), der er forenelige med dette output.

(c) Betragt prissystemet $p \in \mathbb{R}^3_+$, $p_h > 0$, $h = 1, 2, 3$. Hvis producenten skal producere $\bar{y}_1$ enheder af vare 1 og gør dette, således at profitten maksimeres, hvilket input vil da blive valgt?

(d) Angiv for hvilke priser (p_1, p_2, p_3), der findes hhv. én løsning, mere end én løsning og ingen løsning til producentens problem (PP).

4.8.3. Betragt en producent med produktionsmulighederne

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 \leq g(-y_1),\, y_1 \leq 0\},$$

hvor

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{for } 0 \leq z \leq 2 \\ \frac{3}{2}z - 2 & \text{for } 2 < z \leq 4 \\ z & \text{for } z > 4 \end{cases}$$

(a) Undersøg om Y opfylder forudsætningerne P1 og P2.

(b) Find løsningerne til producentens problem (PP) for priser $p = (p_1, p_2)$, hvor $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ og $p_1 + p_2 > 0$.

5. Optimalitet og decentralisering

5.1. Økonomier, tilstande, Pareto-optimalitet

5.1.1. Vi har i de foregående kapitler behandlet to vigtige typer af agenter, forbrugeren og producenten. Tidspunktet er nu inde til at behandle samspillet mellem disse agenter.

Til dette formål vil vi indføre begrebet en *økonomi*. En sådan består af et antal agenter (her m forbrugere og n producenter). Endvidere skal der foreligge en *initialbeholdning* af de l varer, dvs. et varebundt $\omega \in \mathbb{R}^l$. Denne initialbeholdning kan enten benyttes som input i produktionen, eller den kan forbruges direkte.

For at holde styr på, hvilke agenter vi faktisk har i økonomien, og hvor stor initialbeholdningen er, vil det være praktisk at lade disse ting indgå i vor betegnelse af den betragtede økonomi. Vi skriver derfor økonomien

$$\mathcal{E} = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega).$$

I visse situationer – når vi er særlig interesseret i forbrugssiden af økonomien – er det praktisk at betragte økonomier uden producenter. En sådan “forbrugs-økonomi” $\mathcal{E}^F$ kan skrives

$$\mathcal{E}^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, \omega).$$

5.1.2. For en given økonomi $\mathcal{E}$ er vi interesserede i, hvad det endelige resultat vil blive af forskellige institutionelle rammer for den økonomiske adfærd. For at gøre begrebet “det endelige resultat” konkret indfører vi en *tilstand i* $\mathcal{E}$ som en vektor $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, bestående af m varebundter x_i, $i = 1, \ldots, m$ og n varebundter y_j, $j = 1, \ldots, n$.

Vor fortolkning af en sådan tilstand er den oplagte, at x_i specificerer forbruger i’s forbrug og y_j virksomhed j’s produktionsplan. For at denne fortolkning kan være realistisk, kan $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ ikke være helt vilkårlig. Nærmere bestemt: Vi vil indskrænke os til at betragte *opnåelige* tilstande, det vil sige sådanne tilstande $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, for hvilke

$$x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, m,\ y_j \in Y_j,\ j = 1, \ldots, n, \text{ samt}$$
$$\sum_{i=1}^m x_{ih} = \sum_{j=1}^n y_{jh} + \omega_h,\ h = 1, \ldots, l.$$

Den sidste betingelse siger, at der for vare h skal gælde, at det totale forbrug af varen er lig den initiale beholdning plus den totale nettoproduktion (positiv eller negativ) af denne vare.

5.1.3. Hvis den betragtede økonomi er af typen $\mathcal{E}^F$ (jf. 5.1.1), vil tilstande i $\mathcal{E}^F$ naturligvis være vektorer $(x_1, \ldots, x_m)$, og opnåelige tilstande er dem, som opfylder

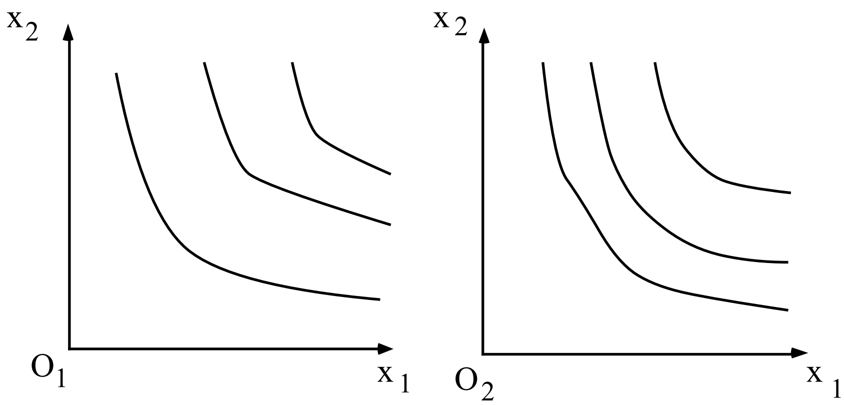
$$x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = \omega.$$

Mængden af opnåelige tilstande vil generelt være meget stor. I en speciel situation, nemlig for økonomien

$$\mathcal{E}^F = ((\mathbb{R}^2_+, S_1), (\mathbb{R}^2_+, S_2), \omega)$$

hvor varerummet er $\mathbb{R}^2$, og der er to forbrugere med forbrugsmulighedsområde $\mathbb{R}^2_+$, kan vi afbilde de opnåelige tilstande, nemlig ved hjælp af den såkaldte *Edgeworth-boks*.

5.1.4. Edgeworth-boksen, der er et af mikroøkonomens yndlingsværktøj, konstrueres således:



Figur 5.1

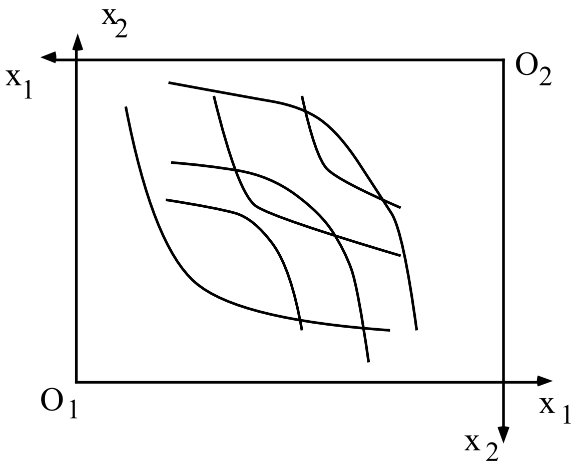
I Figur 5.1 er de to forbrugeres forbrugsmulighedsområde og indifferenskort afbildet i hvert sit koordinatsystem. Vi afsætter nu vektoren ω i forbruger 1's koordinatsystem og anbringer derefter forbruger 2's koordinatsystem således, at nulpunktet ligger i ω og x_2-aksen peger nedad. Derved får vi Figur 5.2.

Lad A være et vilkårligt punkt i boksen. Ved at aflæse koordinaterne i begge koordinatsystemer får vi en tilstand $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$. Denne tilstand er endda opnåelig, idet jo

$$x_{11} + x_{21} = \omega_1,\ x_{12} + x_{22} = \omega_2.$$

Omvendt vil der til enhver opnåelig tilstand svare et punkt i boksen.

5.1.5. Hvilke af de mange opnåelige tilstande i $\mathcal{E}$ er "gode" og hvilke "mindre gode"? Diskussionen i 2.2 og 2.3 har belært os om at gå varsomt frem. I det mindste er det rimeligt at tage hensyn til den vurdering, som økonomiens forbrugere selv anlægger – det er jo dem, det skal gå ud over.



Figur 5.2

Disse forbrugere har jo imidlertid ikke et sammenfaldende syn på sagen, idet de har hver sin nyttefunktion. Det har ikke nogen særlig appel at udvælge én som diktator. I stedet vil vi betragte en klasse af tilstande med den (svage) egenskab, at man ikke kan stille nogen bedre, uden at andre stilles ringere. Vi definerer:

En tilstand $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *siges at være Pareto-optimal, hvis*

(1) $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *er opnåelig, og*

(2) der findes ikke en opnåelig tilstand $(x_1^1, \dots, x_m^1, y_1^1, \dots, y_n^1)$*, således at* $S_i(x_i^1) \geq S_i(x_i^0)$ *for alle* i *med mindst ét strengt ulighedstegn.*

5.1.6. I vort specialtilfælde fra 5.1.4 (Edgeworth-boksen) kan vi illustrere de Pareto-optimale tilstande på følgende måde:

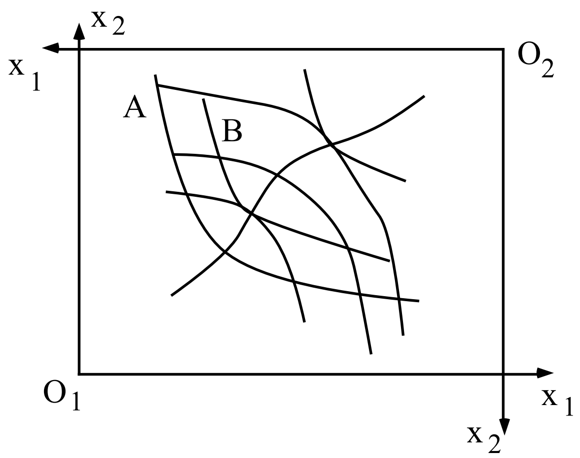
Lad A være et vilkårligt punkt i boksen. Indifferenskurverne for henholdsvis forbruger 1 og forbruger 2 gennem A indtegnes (i Figur 5.3). Herved er der fremkommet en mængde af punkter (tilstande), som er bedre for begge forbrugere end A (denne mængde kaldes mellem venner for "cigaren"). Men det betyder jo, at A ikke kan være Pareto-optimal, idet begge forbrugere kan stilles bedre ved at flytte f.eks. til punktet B.

Denne argumentation fører til, at kun sådanne punkter, hvor de to indifferenskurver gennem punktet har fælles tangent, kan være Pareto-optimale – og alle sådanne punkter er faktisk Pareto-optimale.

Forbindes alle de Pareto-optimale punkter i boksen, får vi den såkaldte *kontraktkurve*, som er indtegnet i figur 5.3.

5.2. Optimalitet og efficiens

5.2.1. I det følgende vil vi beskæftige os indgående med begrebet Pareto-optimale tilstande. Det er derfor på sin plads at diskutere, hvorfor (hvis overhovedet) dette



Figur 5.3

er et interessant begreb.

Lad os starte med at betragte en økonomi uden producenter

$$\mathcal{E}^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, \omega).$$

Her er en tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ Pareto-optimal, hvis (1) tilstanden er opnåelig, og (2) der findes ikke en opnåelig tilstand $(x_1^1, \ldots, x_m^1)$, således at $S_i(x_i^1) \geq S_i(x_i^0)$ for alle i med streng ulighed for mindst én forbruger.

5.2.2. I den simple situation, hvor $l = m = 2$, kan vi afbilde de Pareto-optimale tilstande som kontraktkurven i Edgeworth-boksen vist i Figur 5.4 (jf. 5.1.6). På figuren går kontraktkurven gennem boksens hjørner. Det vil sige, at de tilstande, hvor én forbruger får det hele, er Pareto-optimale. Dette vil generelt være tilfældet, hvis forbrugernes nyttefunktioner opfylder følgende:

FORUDSÆTNING F2': *Hvis der for $x^1, x^2 \in X$ gælder, at $x_h^1 \geq x_h^2$, $h = 1, \ldots, l$, og $x^1 \neq x^2$, da er $S(x^1) > S(x^2)$.*

I så tilfælde har vi nemlig, at hvis forbruger i har fået det hele, dvs. i tilstanden

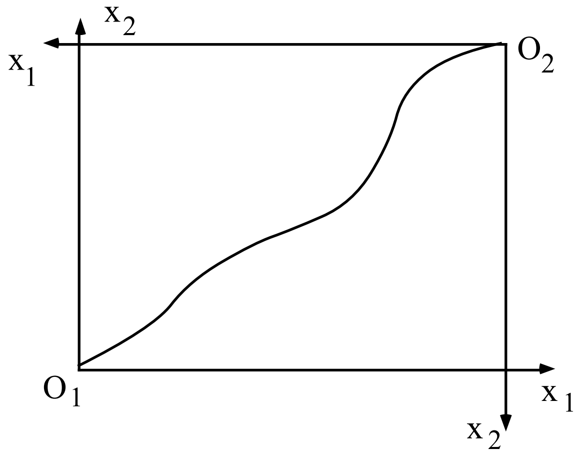
$$(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0) = (0, \ldots, \omega, \ldots, 0)$$

(med ω på i'te plads i vektoren på højre side) vil enhver anden opnåelig tilstand $(x_1^1, \ldots, x_m^1)$ give forbruger i mindre af mindst én vare, altså $S_i(x_i^1) < S_i(x_i^0)$, så $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ er Pareto-optimal.

5.2.3. Om F2' gælder i øvrigt:

hvis forbrugeren (X, S) opfylder F1, F2 og F3, da opfylder han også F2'.

BEVIS: *Lad $x^1, x^2 \in X$ med $x_h^1 \geq x_h^2$, $h = 1, \ldots, l$, og $x^1 \neq x^2$. Sæt $x^0 = x^2 + 2(x^1 - x^2)$. Da er $x_h^0 \geq x_h^2$, $h = 1, \ldots, l$, $x^0 \neq x^2$. Hvis*



Figur 5.4

$x_h^0 > x_h^2$ for alle h, er $S(x^0) > S(x^2)$. Ellers findes der en følge (x^n), så $x^n \to x^0$ og $x_h^n > x_h^2$, alle h og n. Derfor må der gælde $S(x^0) \geq S(x^2)$. Da $x^1 = \frac{1}{2}x^0 + \frac{1}{2}x^2$, fås af F3, at $S(x^1) > S(x^2)$. □

5.2.4. Når tilstande, hvor varerne er fordelt så skævt blandt forbrugerne som i situationen ovenfor, viser sig at være Pareto-optimale, vil en vis portion sund skepsis over for begrebet være berettiget. Det er i hvert fald klart, at et eventuelt krav om Pareto-optimalitet ikke kan stå alene. Dertil er klassen af Pareto-optimale tilstande alt for stor.

5.2.5.* Siden vi er begyndt at argumentere ud fra et intuitivt lighedskrav, skal vi antyde, hvorledes et sådant krav eventuelt kunne udformes i vor situation.

Oplagt nok er der én tilstand, som tilfredsstiller et absolut lighedskrav, nemlig tilstanden

$$(x_1, \ldots, x_m) = \left(\frac{1}{m}\omega, \ldots, \frac{1}{m}\omega\right),$$

hvor alle forbrugere får samme bundt. Denne tilstand er ikke nødvendigvis Pareto-optimal. Men den har en anden egenskab: Der er ikke nogen forbruger, der hellere ville have en anden forbrugers bundt.

Denne egenskab kan benyttes til at definere såkaldte *fair* tilstande:

En tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ kaldes fair, hvis
(1) $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ er opnåelig
(2) $S_i(x_i^0) \geq S_i(x_j^0)$ for alle i og j.

Hvis tilstanden er fair, er der ingen basis for misundelse i økonomien. Alle er gladest for deres eget bundt.

Som nævnt er fair tilstande ikke nødvendigvis Pareto-optimale. Men man kan da betragte mængden af tilstande, som er både fair og Pareto-optimale (sådanne findes faktisk).

5.2.6. Vor indvending ovenfor imod Pareto-optimalitet gik ud på, at klassen af Pareto-optimale tilstande var meget stor. På den anden side er det et rimeligt mindstekrav: hvis en tilstand i $\mathcal{E}^F$ ikke er Pareto-optimal, kan initialbeholdningen omfordeles blandt forbrugerne på en sådan måde, at ingen bliver stillet ringere, men nogle bliver stillet bedre.

Hvis vi også tager producenterne med og betragter økonomien

$$\mathcal{E} = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega),$$

får vi en sammenhæng mellem Pareto-optimalitet og efficiens i produktionen.

En tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *siges at være samfundsmæssigt efficient, hvis*

(1) $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *er opnåelig,*

(2) *der findes ikke en opnåelig tilstand* $(x_1^1, \ldots, x_m^1, y_1^1, \ldots, y_n^1)$ *således at*

$$\sum_{j=1}^n y_{jh}^1 \geq \sum_{j=1}^n y_{jh}^0$$

for alle h *med mindst ét strengt ulighedstegn.*

Hvis tilstanden $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ er samfundsmæssigt efficient, er hver af produktionerne $y_1^0, \ldots, y_n^0$ efficiente (jf. 4.1.4). Det omvendte gælder ikke nødvendigvis.

Lad $\mathcal{E} = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega)$ *være en økonomi, hvor hver forbruger opfylder F1, F2 og F3. Da er enhver Pareto-optimal tilstand samfundsmæssigt efficient.*

Det er temmelig oplagt: hvis der nemlig var produktionsplaner $y_j^1 \in Y_j$, $j = 1, \ldots, n$, så $\sum_{j=1}^n y_{jh}^1 \geq \sum_{j=1}^n y_{jh}^0$ for alle h med $>$ i mindst én koordinat, ville der være mere tilovers til forbrug af mindst én vare og mindst lige så meget af de andre varer. Dette ekstra forbrug kan vi give til en af forbrugerne (f.eks. nr. 1), der så bliver gladere (ifølge F2', jf. 5.2.2).

5.3. Markedsligevægte

5.3.1. Vi har indtil nu diskuteret *egenskaber* ved tilstande, idet hovedvægten lå på et kriterium – Pareto-optimalitet – som det var rimeligt at forlange opfyldt. Vi har ikke beskæftiget os med, *hvordan* vi får dette kriterium opfyldt.

Lad os antage, at en bestemt Pareto-optimal tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ønskes gennemført. En (teoretisk) mulighed var jo at indføre en *planmyndighed*, der blot (!) skal give den j'te producent påbud om at producere y_j^0 og den i'te forbruger at forbruge x_i^0. Denne "mulighed" foreligger imidlertid kun på papiret.

I praksis ville den stille ganske uoverkommelige krav, dels til planmyndighedens viden om agenternes karakteristika, dels til kommunikationssystemet.

I praksis må man derfor klare sig ad anden vej – ved at specificere nogle rammer for agenternes adfærd (institutioner) på en sådan måde, at det endelige resultat af denne adfærd bliver det, man ønsker.

Vi skal i det følgende undersøge, hvorledes dette kan opnås, når den betragtede institution er et marked af typen M_p for et prissystem $p \in \mathbb{R}^l$.

5.3.2. I tidligere kapitler har vi diskuteret agenternes adfærd på markedet. Vi kan derfor umiddelbart sammenfatte dette i følgende definition:

En tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$*, et prissystem* $p \in \mathbb{R}_+^l$ *og et sæt indkomster* $(R_1, \ldots, R_m)$ *kaldes en markedsligevægt, hvis*

(1) $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *er opnåelig,*

(2) for alle forbrugere $i = 1, \ldots, m$ *gælder:* x_i^0 *maksimerer* S_i *på mængden* $\{x \in X_i \mid p \cdot x \leq R_i\}$*,*

(3) for alle producenter $j = 1, \ldots, n$ *gælder:* y_j^0 *maksimerer* $p \cdot y$ *på mængden* Y_j*.*

En tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, som hører til en markedsligevægt, er altså fremkommet ved, at producenterne maksimerer profit ved det givne prissystem p, og forbrugerne maksimerer nytte på deres budgetmængder givet ved p og de specificerede indkomster $R_1, \ldots, R_m$. Hvor disse indkomster stammer fra, er ikke specificeret – det får vi ikke brug for på nuværende tidspunkt, men det kan f.eks. være den samlede profit delt ud efter et eller andet kriterium.

5.3.3. Vi har nu indført to typer af tilstande på helt forskellig måde: Pareto-optimale tilstande, som opfyldte et rimelighedskriterium, og tilstande hørende til markedsligevægte, defineret som resultatet af en bestemt institutionel adfærd. Der er imidlertid en tæt sammenhæng mellem de to typer. Vort første resultat herom er følgende:

HOVEDSÆTNING I: *En tilstand, som hører til en markedsligevægt, er Pareto-optimal*

Eller, skrevet detaljeret:

Lad $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, p, R_1, \ldots, R_m)$ *være en markedsligevægt i økonomien* $\mathcal{E} = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega)$*. Antag, at forbrugerne opfylder F1 og F2. Da er tilstanden* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *Pareto-optimal.*

5.3.4. Beviset for Hovedsætning I er ligetil. Her kommer det:

BEVIS: Hvis $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ikke var Pareto-optimal, måtte der jo være en anden opnåelig tilstand $(x_1^1, \ldots, x_m^1, y_1^1, \ldots, y_n^1)$ så at $S_i(x_i^1) \geq S_i(x_i^0)$ for alle i med mindst ét strengt ulighedstegn, lad os sige $S_1(x_1^1) > S_1(x_1^0)$.

Da x_i^0 løser FP ved prissystemet p og indkomsten R_i, $i = 1, \ldots, m$, må der for det første gælde, at

$$p \cdot x_1^1 > R_1 \geq p \cdot x_1^0 \tag{1}$$

idet $S_1(x_1^1) > S_1(x_1^0)$. For $i \neq 1$ er $S_i(x_i^1) \geq S_i(x_i^0)$. Hvis $p \cdot x_i^1 < R_i$, kunne vi finde et bundt x_i' med $x_{ih}' > x_{ih}^1$, $h = 1, \ldots, l$ og $p \cdot x_i' < R_i$. Men så var $S_i(x_i') > S_i(x_i^1) \geq S_i(x_i^0)$ ifølge F2, og x_i^0 kunne ikke være løsning til FP. Altså har vi

$$p \cdot x_i^1 \geq R_i \geq p \cdot x_i^0,\ i = 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Endelig har vi for alle j, at $p \cdot y_j^1 \leq p \cdot y_j^0$, idet jo y_j^0 maksimerer profitten, eller

$$-p \cdot y_j^1 \geq -p \cdot y_j^0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Hvis vi nu adderer ulighederne (1) – (3), hvoraf (1) er streng, får vi

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^m x_i^1 - \sum_{j=1}^n y_j^1 \right) > p \cdot \left(\sum_{i=1}^m x_i^0 - \sum_{j=1}^n y_j^0 \right).$$

I begge parenteser står det samme, nemlig vektoren ω (det følger af definitionen på en opnåelig tilstand). Vi har dermed fået en modstrid. □

5.3.5. Vi har således vist, at et bestemt institutionelt setup, nemlig det, hvor agenterne kan vælge handeler på et marked givet ved et prissystem, fører til Pareto-optimale tilstande.

Man vil ofte støde på begrebet *fuldkommen konkurrence* for denne type institution, idet man derved forstår, at

(1) alle agenter antager, at de kan købe og sælge ubegrænset til den givne pris, og
(2) ingen agenter antager, at de kan påvirke priserne ved deres handlinger.

Når vi ikke benytter betegnelsen, skyldes det, at begrebet fuldkommen konkurrence ofte benyttes med noget varierende betydning.

5.3.6. En nærliggende fortolkning af vort resultat vil være, at vi nu har bevist markedsmekanismens fortræffelighed: Markederne vil, overladt til sig selv, skabe tilstande, som er "gode" for samfundet i den forstand, at man ikke kan blive enige om noget andet, som er bedre.

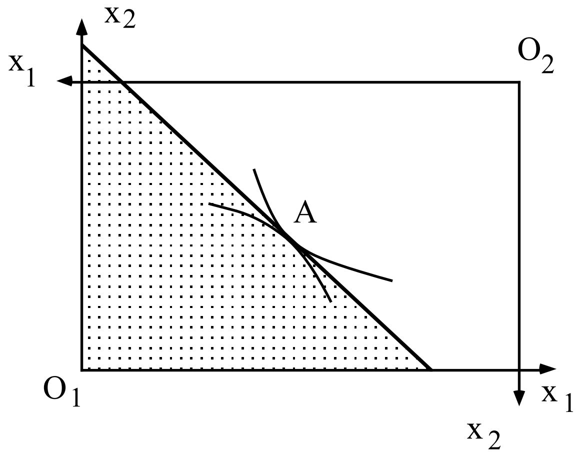
Det er for så vidt rigtigt nok. Blot skal man være opmærksom på, at når der tales om "markedet" i forbindelse med praktisk politik, er det temmelig sjældent et marked af den slags, vi har beskæftiget os med her, dvs. et fuldkommen konkurrence marked. Der er sjældent ret mange sælgere på markeder for konkrete varer og tjenester, og disse sælgere tager næppe priserne for givne og uden for deres påvirkning, men er tværtimod helt på det rene med, at deres adfærd påvirker markedet – det er jo også en del af baggrunden for marketingaktiviteter. Virkelighedens markeder har ikke nødvendigvis de samme optimalitetsegenskaber som vores idealiserede markeder. Det betyder ikke, at vor teori er irrelevant, men snarere at den skal bruges med varsomhed, noget som desværre ikke altid sker.

En oplagt indvending mod vort resultat er, at der måske nok skabes Pareto-optimalitet, men at det kan ske på bekostning af andre egenskaber såsom lighed og hensyn til svage. At markedsmekanismen kan give denne slags resultater, er kendt fra virkeligheden, men hvad med vor idealiserede teoretiske marked? Det vil vi få svar på, når vi har set på den "omvendte" sætning.

5.4. Grafisk fremstilling. Hovedsætning II

5.4.1. Lad os som indledning til vor Hovedsætning II vende tilbage til den simple økonomi $\mathcal{E}^F$ fra 5.1.3, hvor $l = m = 2$, således at de Pareto-optimale tilstande kan illustreres som kontraktkurven i Edgeworth-boksen.

Antag nu, at vi har udvalgt en bestemt Pareto-optimal tilstand (x_1^0, x_2^0), i Figur 5.5 bestemt ved punktet A. Som vi bemærkede i 5.1.6, er dette punkt karakteriseret ved, at de to forbrugeres indifferenskurver igennem punktet har fælles tangent.



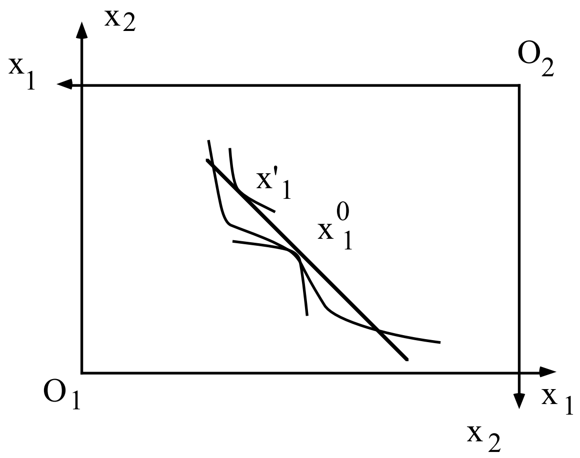
Figur 5.5

Lad os forlænge denne fællestangent således, at den skærer akserne. Vi bemærker så, at hvis vi vælger en pris $p = (p_1, p_2)$ og en indkomst R_1, således at forbruger 1's budgetmængde bliver den prikkede mængde, da vil forbruger 1 netop vælge x_1^0 som løsning til FP ved prisen p og indkomsten R_1.

Tilsvarende for forbruger 2: Her kan vi bruge samme pris $p = (p_1, p_2)$, der jo er bestemt ved hældningen på fællestangenten, og tilpasse R_2, således at forbruger 2 vælger x_2^0, når han løser FP.

I alt har vi opnået, at den Pareto-optimale tilstand (x_1^0, x_2^0) *kan fås* som en markedsligevægt ved et passende valg af pris p og indkomster R_1 og R_2.

5.4.2. I ovenstående geometriske argument har vi været en smule nonchalante med hensyn til de forudsætninger, som agenterne må opfylde. Hvis f.eks. forbruger 1's indifferenskurver havde set ud som i Figur 5.6, havde der nok været en fællestangent, men argumentet fra før virker ikke: Giver vi ham budgetmængde svarende til denne fællestangent, vil han ikke vælge x_1^0, men et andet punkt x_1'. Problemet her er naturligvis, at han ikke opfylder F3.



Figur 5.6

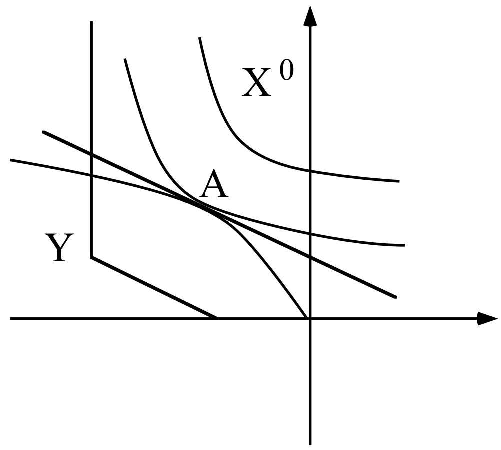
5.4.3. Hvis vi også vil have producenter med i økonomien, må vi benytte en anden type figur, nemlig det såkaldte *Koopmans-diagram*.

Vi betragter her en økonomi med 2 varer, en forbruger og en producent. Det kan f.eks. være Robinson Crusoe (som økonomer altid har haft en vis forkærlighed for), der optræder med spaltet personlighed: Han er dels forbruger og har som sådan et forbrugsmulighedsområde X, bestående af de kombinationer af arbejdskraft og bananer, ved hvilke han kan overleve, samt en nyttefunktion S på X. Som producent har han et produktionsmulighedsområde Y. Vi antager, at initialbeholdningen er 0.

Vi indtegner X og Y i samme diagram (Figur 5.7). En Pareto-optimal tilstand (x^0, y^0) er karakteriseret ved, at ingen anden $y \in Y$ kan give et forbrug, som er bedre end x^0. På figuren er f.eks. punktet A en sådan tilstand.

Hvis vi nu indtegner mængden af alle forbrug x, som er mindst lige så gode som x^0, får vi en mængde X^0, som kun skærer Y i punktet A. Tegnes nu linjen, som skiller Y og X^0, ser vi, at hvis vi indfører priser $p = (p_1, p_2)$ og indkomst R, således at denne linje bliver Robinsons budgetlinje, vil han som forbruger vælge x^0. Som producent vil han, hvis han maksimerer profit ved de givne priser $p = (p_1, p_2)$ vælge y^0. Og oven i købet vil den profit, som Robinson-producenten får ud af det, være nøjagtig den indkomst R, som Robinson-forbrugeren skal bruge.

Igen ser vi, at den givne Pareto-optimale tilstand *kan fås* som markedsligevægt. I den betragtede situation kan det nok siges, at hvis Robinson kan sætte sig ud over sin personlighedsspaltning, var det måske nok nemmere at etablere tilstanden



Figur 5.7

direkte frem for at handle med sig selv ved et vist prissystem. Men vi laver jo heller ikke teorien for Robinsons skyld.

5.4.4. De ovenstående geometriske argumenter antyder, at der må gælde et generelt resultat om, at Pareto-optimale tilstande kan opnås som markedsligevægt. Det er faktisk også tilfældet. Vi har

HOVEDSÆTNING II. *En Pareto-optimal tilstand kan fås som markedsligevægt,*

eller, skrevet i detaljer:

Lad $\mathcal{E} = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega)$ *være en økonomi, hvor alle forbrugere opfylder F1, F2 og F3, og alle producenter opfylder P1. Lad* $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *være en Pareto-optimal tilstand i* $\mathcal{E}$ *med* $x_i^0 \in \operatorname{int} X_i$*,* $i = 1, \dots, m$*.*

Da findes der et prissystem $p \neq 0$ *med* $p_h \geq 0$*,* $h = 1, \dots, l$ *og indkomster* $R_1, \dots, R_m$*, således at* $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0, p, R_1, \dots, R_m)$ *er en markedsligevægt.*

5.4.5. Før vi beviser Hovedsætning II, vil vi se på et par hjælpesætninger (lemma'er).

Lad C_1 og C_2 være delmængder af $\mathbb{R}^l$. Vi kan da danne en mængde bestående af alle de vektorer $c \in \mathbb{R}^l$, der kan skrives som en sum af vektorer c_1 og c_2 med $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$. Denne mængde kaldes $C_1 + C_2$. Vi har altså

$$C_1 + C_2 = \{c \in \mathbb{R}^l \mid c = c_1 + c_2, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

LEMMA. *Hvis* C_1 *og* C_2 *er konvekse mængder, da er* $C_1 + C_2$ *konveks.*

BEVIS: Lad $c, c' \in C_1 + C_2$ og vælg λ med $0 \leq \lambda \leq 1$. Vi skal vise, at $\lambda c + (1 - \lambda)c' \in C_1 + C_2$. Da $c \in C_1 + C_2$ må vi have

(1) $$c = c_1 + c_2$$

for et $c_1 \in C_1$ og et $c_2 \in C_2$. Tilsvarende har vi

$$(2) \qquad c' = c'_1 + c'_2$$

for $c'_1 \in C_1$, $c'_2 \in C_2$. Ganges (1) med λ, (2) med $(1-\lambda)$, og adderes, fås

$$\lambda c + (1-\lambda)c' = [\lambda c_1 + (1-\lambda)c'_1] + [\lambda c_2 + (1-\lambda)c'_2].$$

Her er den første kantede parentes et element i C_1 (som jo er konveks), den anden et element i C_2. Altså kan $\lambda c + (1-\lambda)c'$ skrives som en sum af en vektor fra C_1 og en vektor fra C_2. □

5.4.6. Vi kan nu fortsætte succesen og definere mængder $C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ for et vilkårligt antal mængder $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Der må gælde

LEMMA. *Hvis $C_1, \ldots, C_k$ er konvekse mængder, da er også $C_1 + \cdots + C_k$ konveks.*

5.4.7. Vi har set (4.3.4), at man for en mængde $C \subset \mathbb{R}^l$ kan definere mængden $-C$ ved

$$-C = \{c \in \mathbb{R}^l \mid -c \in C\}.$$

Det er let at se, at der gælder:

LEMMA. *Hvis C er konveks, da er også $-C$ konveks.*

5.4.8. Vor sidste hjælpesætning er følgende:

Lad $C_1, \ldots, C_k$ være delmængder af $\mathbb{R}^l$, og antag at $c^0 \in C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ maksimerer funktionen $p \cdot c$ over alle $c \in C_1 + C_2 + \cdots + Ck$, hvor $p \in \mathbb{R}^l$.

Hvis $c^0 = c_1^0 + c_2^0 + \cdots + c_k^0$, $c_i^0 \in C_i$, $i = 1, \ldots, k$, da vil c_i^0 maksimere $p \cdot c$ over alle $c \in C_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Hvis altså en vektor i en sum-mængde maksimerer en lineær funktion på denne sum-mængde, vil hver af de vektorer, hvoraf den er dannet, maksimere funktionen på "sin" mængde.

BEVIS: Antag, at der var mindst ét i, således at c_i^0 ikke maksimerede $p \cdot c$ på C_i. Da måtte der være $c_i^1 \in C_i$, så $p \cdot c_i^1 > p \cdot c_i^0$. Hvis vi definerer

$$c^1 = c_1^0 + c_2^0 + \cdots + c_i^1 + \cdots + c_k^0,$$

hvor vi i summen, der definerer c^0, har udskiftet i'te led med c_i^1, får vi

$$\begin{aligned} p \cdot c^1 &= p \cdot c_1^0 + p \cdot c_2^0 + \cdots + p \cdot c_i^1 + \cdots + p \cdot c_k^0 \\ &> p \cdot c_1^0 + p \cdot c_2^0 + \cdots + p \cdot c_i^0 + \cdots + p \cdot c_k^0 = p \cdot c^0 \end{aligned}$$

i strid med, at c^0 maksimerer $p \cdot c$ på $C_1 + C_2 + \cdots + C_k$. $\square$

5.4.9. Vi kan nu gå i gang med at bevise Hovedsætning II. Gangen i beviset svarer til argumentet i 5.4.3: Vi definerer en mængde af foretrukne bundter og skiller denne mængde fra mængden af mulige produktioner. Det er dog praktisk at gennemføre denne "adskillelse" lidt anderledes end på figuren.

BEVIS: Lad $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ være den betragtede Pareto-optimale tilstand. For hver forbruger i definerer vi mængden

$$X_i^0 = \{x_i \in X_i \mid S_i(x_i) \geq S_i(x_i^0)\}$$

af de bundter, forbruger i er mindst lige så glad for som x_i^0. Denne mængde er konveks ifølge F3. Vi laver nu mængden

$$Z = \sum_{i=1}^{m} X_i^0 + \sum_{j=1}^{n} (-Y_j) + \{-\omega\}$$

som summen af alle de "foretrukne" mængder X_i^0, $i = 1, \dots, m$, alle produktionsmulighedsområder Y_j med modsat fortegn og endelig mængden bestående af en vektor $-\omega$. Alle mængderne X_i^0, for $i = 1, \dots, m$, mængderne $-Y_j$, $j = 1, \dots, n$, og mængden $\{-\omega\}$ er konvekse (her bruges lemma 5.4.7), så Z er en konveks mængde (lemma 5.4.6).

Vi noterer os, at $0 \in Z$; vi har nemlig

$$0 = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 - \sum_{j=1}^{n} y_j^0 - \omega,$$

idet tilstanden $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ er opnåelig, og $x_i^0 \in X_i^0$, $i = 1, \dots, m$, $y_j^0 \in Y_j$, $j = 1, \dots, n$.

Lad nu $u \in \mathbb{R}^l$ være en vektor med bare negative koordinater, dvs. $u_h < 0$, $h = 1, \dots, l$. Da ligger u ikke i Z. Hvis den nemlig lå i Z, havde vi

$$u = \sum_{i=1}^{m} x_i^1 - \sum_{j=1}^{n} y_j^1 - \omega$$

for visse $x_i^1 \in X_i^0$, $i = 1, \dots, m$, $y_j^1 \in Y_j$, $j = 1, \dots, n$, eller

$$0 = (x_1^1 - u) + \sum_{i=2}^{m} x_i^1 - \sum_{j=1}^{n} y_j^1 - \omega. \tag{1}$$

Betragt da tilstanden $((x_1^1 - u), x_2^1, \dots, x_m^1, y_1^1, \dots, y_n^1)$. Af ligningen (1) ses, at den er opnåelig. For $i = 1, \dots, m$ er $x_i^1 \in X_i^0$, dvs. $S_i(x_i^1) \geq$

$S_i(x_i^0)$. Ydermere er $x_1^1 - u$ større end x_1^1 i alle koordinater, så (F2) $S_1(x_1^1 - u) > S_1(x_1^1) \geq S_1(x_1^0)$. Men så kunne $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ikke være Pareto-optimal.

I alt har vi, at mængden Z er konveks, indeholder 0, men skærer ikke mængden $N = \{x \in \mathbb{R}^l \mid x_h < 0,\ h = 1, \ldots, l\}$. Der findes da (App. 12) $p \in \mathbb{R}^l$, $p \neq 0$, således at $p \cdot z \geq 0$ for alle $z \in Z$.

Faktisk må der gælde $p_h \geq 0$ for alle h. Hvis nemlig $p_h < 0$, vælger vi en vektor $e_h = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ med 1 på h'te plads, 0 på de øvrige. Vi har da $p \cdot e_h < 0$. Men e_h ligger i Z, idet

$$e_h = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 - (y_1^0 - e_h) - \sum_{j=2}^{n} y_j^0 - \omega,$$

hvor $(y_1^0 - e_h) \in Y_1$ iflg. P1(e). Derfor kan vi ikke have $p \cdot e_h < 0$.

Vektoren p skal være vort prissystem. Vi sætter $R_i = p \cdot x_i^0$, $i = 1, \ldots, m$, og mangler blot at vise, at $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, p, R_1, \ldots, R_m)$ er en markedsligevægt.

Vi har for det første, at vektoren 0 minimerer $p \cdot z$ (eller maksimerer $-p \cdot z$) på Z. Fra 5.4.8 får vi da dels

(i) x_i^0 minimerer $p \cdot x$ på X_i^0, $i = 1, \ldots, m$, dels
(ii) y_j^0 maksimerer $p \cdot y$ på Y_j, $j = 1, \ldots, n$.

Her er (ii) netop betingelse (3) i definitionen af en markedsligevægt (5.3.2). Betingelse (i) siger, at hvis $S_i(x) \geq S_i(x_i^0)$, dvs. $x \in X_i^0$, da er $p \cdot x \geq p \cdot x_i^0$. Da vi også har $p \cdot x_i^0 = R_i > v_{X_i}(p)$, idet $x_i^0 \in \operatorname{int} X_i$, får vi fra sætning 3.5.2, at x_i^0 er løsning til FP for alle i, så $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, p, R_1, \ldots, R_m)$ er en markedsligevægt. $\square$

5.5. Differentiabilitet, samfundsnytte og second-best.

5.5.1. I dette afsnit forudsætter vi differentiabilitet – dvs. at alle forbrugere opfylder F4 og alle produktionsmuligheder kan beskrives ved differentiable produktionsfunktioner. Derved kan vi få Hovedsætning II frem på en anden måde og samtidig få et par andre resultater.

Lad os først endnu en gang betragte en Pareto-optimal tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$. Sæt $S_i(x_i^0) = S_i^0$ for $i = 2, \ldots, m$. I definitionen af Pareto-optimalitet ligger, at vi ikke kan stille nogen forbruger, specielt ikke forbruger 1, bedre, når vi samtidig skal holde de øvrige forbrugere på samme nytteniveau, som de havde i den betragtede tilstand. Tilstanden maksimerer således S_1 under bibetingelserne $S_i(x_i) = S_i^0$, $i = 2, \ldots, m$, samt de bibetingelser, der siger, at tilstanden skal være opnåelig. Med andre ord:

$(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ Pareto-optimal

$\Rightarrow (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ er en løsning til problemet

$$\begin{aligned}
&\text{Max } S_1(x_1) \text{ over alle } (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \text{ med} \\
&S_i(x_i) = S_i^0, \qquad i = 2, \dots, m, \\
&f_j(y_j) = 0, \qquad j = 1, \dots, n, \\
&\sum_{i=1}^m x_{ih} = \sum_{j=1}^n y_{jh} + \omega_h, \qquad h = 1, \dots, l.
\end{aligned}$$

5.5.2. Vi kan nu benytte standardresultatet om maksimering under bibetingelser:

Antag, at $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *er en Pareto-optimal tilstand med* $x_i^0 \in \operatorname{int} X_i$, $i = 1, \dots, m$. *Da er* $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *stationært punkt (alle partielle afledede er* 0*) for Lagrange-funktionen*

$$\begin{aligned}
L(x_1, \dots, &x_m, y_1, \dots, y_n, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_l) \\
&= S_1(x_1) + \sum_{i=2}^m \lambda_i (S_i(x_i) - S_i^0) + \sum_{j=1}^n \mu_j f_j(y_j) + \\
&\quad + \sum_{h=1}^l \sigma_h \Big(\sum_{i=1}^m x_{ih} - \sum_{j=1}^n y_{jh} - \omega_h\Big)
\end{aligned}$$

dvs. $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ *er en løsning til ligningssystemet givet ved*

$$(*) \qquad \begin{aligned}
S'_{1h} + \sigma_h &= 0,\ h = 1, \dots, l, \\
\lambda_i S'_{ih} + \sigma_h &= 0,\ i = 2, \dots, m,\ h = 1, \dots, l, \\
\mu_j f'_{jh} - \sigma_h &= 0,\ j = 1, \dots, n,\ h = 1, \dots, l,
\end{aligned}$$

samt bibetingelserne til maksimeringsproblemet i 5.5.1.

5.5.3. Af systemet (*) får vi, at der for hver forbruger i gælder

$$\frac{S'_{ih}}{S'_{ik}} = \frac{\sigma_h}{\sigma_k}$$

for to vilkårlige varer h og k, så *det marginale substitutionsforhold er ens for alle forbrugere.* Helt tilsvarende har vi

$$\frac{f'_{jh}}{f'_{jk}} = \frac{\sigma_h}{\sigma_k}$$

så *det marginale substitutionsforhold i produktionen er ens for alle producenter. Endda ses det, at det marginale substitutionsforhold i forbruget er lig det marginale substitutionsforhold i produktionen.*

Vi har således, at forbrugernes ("subjektive") vurdering af varerne stemmer overens med producenternes ("teknisk betingede") vurdering. Det er nærliggende at benytte dette til at definere et prissystem.

5.5.4. Vi antager nu alle forudsætninger for Hovedsætning II opfyldt (samt vor differentiabilitetsantagelse, jf. 5.5.1) og viser, hvorledes vi kan komme frem til sætningen i denne situation:

Først sætter vi $p_h = -\sigma_h$, $h = 1, \ldots, l$. Fra den første ligning i (*) ser vi, at vektoren p ikke er nulvektoren, idet p er lig vektoren af partielle afledede af S_1, som er $\neq 0$ (F4). Endvidere er $p_h \geq 0$, $h = 1, \ldots, l$, da S_1 er monoton (F2). Vektoren p skal være vores prissystem. Vi sætter $p \cdot x_i^0 = R_i$ for $i = 1, \ldots, m$.

For hver forbruger i har vi da, at x_i^0 løser systemet (hvor for $i = 1$ vi har $\lambda_i = 1$)

$$\begin{aligned} S'_{ih} - \frac{1}{\lambda_i} p_h &= 0, \ h = 1, \ldots, l, \\ R_i - p \cdot x_i &= 0. \end{aligned}$$

Ifølge sætning 3.5.5 er x_i^0 da en løsning til FP.

For hver producent j er y_j^0 en løsning til systemet

$$\begin{aligned} \mu_j f'_{jh} + p_h &= 0, \ h = 1, \ldots, l, \\ f_j(y_{j1}, \ldots, y_{jl}) &= 0 \end{aligned}$$

for et vist μ_j, der ikke kan være 0, for i så fald var også alle σ_h'erne nul, og det er de ikke. Sætning 4.5.7 siger da, at y_j^0 er løsning til PP.

5.5.5. Som nævnt er klassen af Pareto-optimale tilstande i en given økonomi $\mathcal{E}$ meget stor. Kravet om Pareto-optimalitet må derfor ved et eventuelt valg af tilstand (f.eks. ved en planmyndighed) suppleres med andre kriterier.

Et eksempel på sådanne har vi set i 5.2.5. Her vil vi betragte en anden mulighed: Antag, at der er givet en samfundsnyttefunktion

$$U(S_1(x_1), \ldots, S_m(x_m)),$$

der tildeler et tal $U(r_1, \ldots, r_m)$ til ethvert sæt $(r_1, \ldots, r_m)$ af m tal fortolket som den nytte, samfundet opnår, hvis de enkelte forbrugere har opnået nytteniveauer $r_1, \ldots, r_m$.

Vi har tidligere (2.3.8) set, at der er fundamentale problemer forbundet med at konstruere en sådan samfundsnyttefunktion. Her vil vi blot tænke os, at man har accepteret funktionen U. I øvrigt antages det, at U er differentiabel og $U'_i > 0$, dvs. at samfundets nytte vokser, hvis den i'te forbrugers nytte vokser (og de andres nytte er konstant).

5.5.6. Givet, at samfundsnyttefunktionen U er accepteret, har vi et oplagt kriterium for valg af tilstand – nemlig en opnåelig tilstand som maksimerer U:

Tilstanden $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *siges at være et samfunds-optimum, hvis* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *løser maksimeringsproblemet*

$$\max U(S_1(x_1), \ldots, S_m(x_m))$$

over alle tilstande $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ *som opfylder*

$$f_j(y_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ih} = \sum_{j=1}^{n} y_{jh} + \omega_h,\ h = 1, \ldots, l.$$

Vi har her igen et maksimeringsproblem med bibetingelser og får (detaljerne overlades nu til læseren), at $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ må tilfredsstille systemet

$$U_i' S_{ih}' + \sigma_h = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h = 1, \ldots, l,$$
$$\mu_j f_{jh}' - \sigma_h = 0,\ j = 1, \ldots, n,\ h = 1, \ldots, l.$$

Vi kan (ligesom i 5.5.4) vælge prissystem p med $p_h = -\sigma_h$, $h = 1, \ldots, l$, og kan derved få samfundsoptimummet frem som markedsligevægt. Det kommer i øvrigt ikke overraskende: Betingelsen $U_i' > 0$ sikrer, at et samfundsoptimum er et Pareto-optimum, og så kan vi bruge Hovedsætning II.

5.5.7.* En lille “praktisk” anvendelse af disse resultater er følgende:

Lad $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, p, R_1, \ldots, R_m)$ være en markedsligevægt i en økonomi $\mathcal{E}$, for hvilken der er givet en samfundsnyttefunktion af typen ovenfor. Antag, at tilstanden ændres en lille smule, dvs. hvert forbrug x_i^0 ændres med dx_i, hver produktion y_j^0 med dy_j (dette kan tænkes at ske ved, at man gennem et offentligt projekt kan ændre produktionsmulighedsområderne, så at man får nye opnåelige tilstande).

Vi kan da finde ændringen i samfundsnytte ved

$$dU = \sum_{i=1}^{m} U_i'\, dS_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{l} U_i' S_{ih}'\, dx_{ih}.$$

Hvis nu den markedsligevægt, vi starter fra, er den, som er knyttet til samfundsoptimummet, har vi

$$U_i' S_{ih}' = p_h,\ i = 1, \ldots, m,\ h = 1, \ldots, l,$$

så vi får

$$dU = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{l} p_h\, dx_{ih}. \tag{1}$$

Dette resultat har to (beslægtede) fortolkninger:

(i) Cost-benefit-analysens hovedsætning (for "små" projekter): Man kan finde ud af, om et projekt, hvis endelige resultat er en lille ændring i de enkelte forbrugeres bundter, er godt eller dårligt (i relation til en samfundsnyttefunktion) ved at udregne værdien ved de givne priser af ændringen. Et argument for denne metode er, at man *ikke behøver at kende* samfundsnyttefunktionen – den indgår slet ikke på højre side i ligningen (1).

Dette argument er ved nærmere eftersyn temmelig tyndt: Forudsætningen for at bruge (1) er jo, at *man starter fra et samfundsoptimum,* og kender man ikke samfundsnyttefunktionen, bliver det jo i høj grad en trossag.

(ii) Hvis vi fortolker de små ændringer dx_i og dy_j som forskelle i tilstanden fra en periode til den næste (f.eks. fra år til år) indtruffet på grund af, at produktionsmulighedsområderne er ændret (f.eks. ved produktivitetsforøgelser), kan udtrykket $\sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{l} p_h \, dx_{ih}$ opfattes som *ændringen i bruttonationalproduktet* (BNP) målt i faste priser (nemlig første periodes).

Ligning (1) siger da, at hvis BNP vokser, er samfundet blevet bedre stillet. Dette vil man jo nok mene, at man vidste i forvejen. Men læg mærke til forudsætningerne: Det gælder kun, hvis man starter i en tilstand, som er optimal for den givne samfundsnyttefunktion. Er det ikke tilfældet, kan man *ikke slutte,* at samfundet stilles bedre, når BNP vokser.

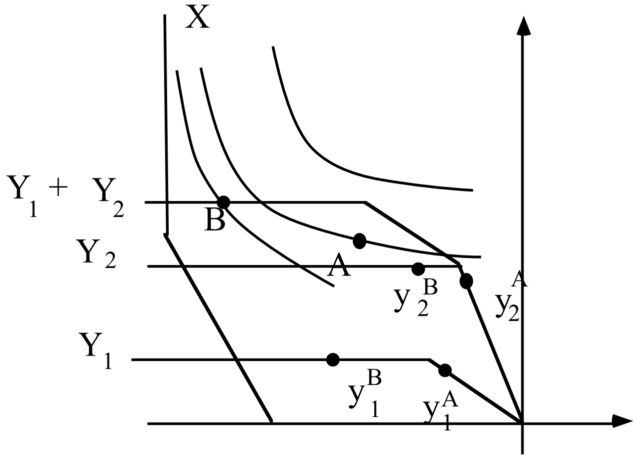
5.5.8.* Til vor sidste anvendelse af resultaterne i dette afsnit vil vi betragte et simpelt eksempel med to varer, én forbruger og to producenter.

Vi ved, at i et Pareto-optimum, og dermed også i et samfunds-optimum, må de marginale substitutionsforhold være ens for alle agenter. Antag nu, at der i den betragtede simple økonomi er etableret en tilstand, hvor alle de marginale substitutionsforhold er forskellige. Hvilket konkret valg af institutioner, der har ført til denne tilstand, behøver ikke at bekymre os i denne sammenhæng. På Figur 5.8 er tilstanden angivet ved punktet A. Den produktion, der ligger bag tilstanden, er fremkommet som summen af produktionerne y_1^A og y_2^A i de to virksomheder; tydeligt nok er det marginale substitutionsforhold i produktionen forskelligt i de to virksomheder.

Lad os nu antage, at det lykkes at ændre tilstanden til en anden, punktet B på figuren, fremkommet som sum af produktionerne y_1^B og y_2^B. Nu er *det marginale substitutionsforhold* blevet *ens for de to producenter.* I relation til udgangssituationen må dette forekomme som en forbedring, idet én af de ligninger, som skal være opfyldt i optimum, er blevet korrekt – eller, formuleret i økonomiske termer, en af uoverensstemmelserne med frie markeder er blevet fjernet.

Men er det så også en forbedring? I det betragtede eksempel, hvor vi har en oplagt samfundsnyttefunktion, nemlig forbrugerens nyttefunktion, ses det, at samfundet (forbrugeren) er blevet *ringere stillet.* Vi kan derfor konkludere:

hvis man fra en tilstand, hvor visse af de marginale substitutionsforhold ikke er ens, flytter til en tilstand, hvor flere (men ikke alle) marginale



Figur 5.8

substitutionsforhold er identiske, vil samfundets nytte ikke nødvendigvis vokse.

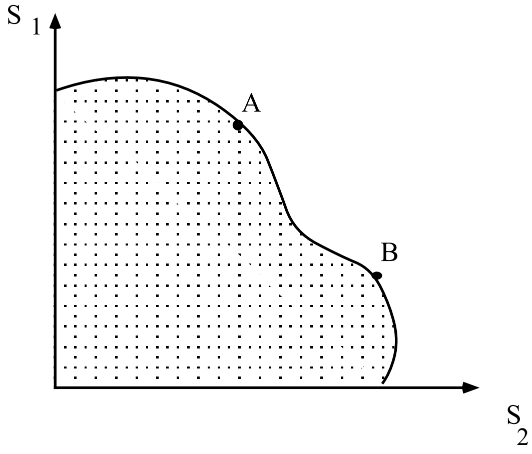
Tilstande af den type, vi her har betragtet, vil ofte indtræde som resultat af en optimering under visse yderligere restriktioner – man taler om et *næstbedste* (second-best) optimum. Vor konklusion bliver så, at det ikke nødvendigvis giver en forbedring, hvis nogle af disse restriktioner ophæves. Dette resultat kaldes ofte “den generelle teori om second-best”.

5.6. Diskussion

5.6.1. Vi har set – og det var det væsentligste budskab i dette kapitel – at tilstande hørende til markedsligevægte er Pareto-optimale, og Pareto-optimale tilstande kan fås som markedsligevægte. Vi kan illustrere resultatet for en økonomi med to forbrugere ved at indtegne *nyttemulighedsområdet* (jf. 2.3.5). For hver opnåelig tilstand $(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_n)$ kan vi finde de tilhørende værdier af nyttefunktionerne $S_1(x_1)$ og $S_2(x_2)$ og får derved f.eks. den prikkede mængde i Figur 5.9.

De tilstande, som stammer fra markedsligevægte, er Pareto-optimale. Punktet A på figuren kan være en sådan. Det er meget tænkeligt, at denne tilstand, uanset Pareto-optimaliteten, vil blive forkastet i det pågældende samfund (måske ud fra lighedsbetragtninger). Måske vil B være bedre i relation til en eller anden samfundsnyttefunktion. Men hvis B er Pareto-optimal (som på figuren) vil den kunne fås som markedsligevægt.

5.6.2. Vi har allerede (5.3.1) argumenteret for, hvorfor markedsligevægtene interesserer os: En tilstand med visse egenskaber (f.eks. Pareto-optimalitet) kan ikke forventes realiseret, bare fordi den har disse egenskaber – det sker kun i eventyr. Vi må derfor finde institutioner, der fører frem til de ønskede tilstande, og det er netop, hvad markedsinstitutionen gør i vort tilfælde.



Figur 5.9

I stedet for den praktisk umulige procedure, gående ud på at sende direkte påbud om forbrug og produktion til hver enkelt agent, kan man her nøjes med at meddele en fælles pris og indkomster til hver forbruger. Agenterne klarer derefter resten. Man udtrykker dette ved, at vi har decentraliseret beslutningerne ved hjælp af prissystemet.

5.6.3. Når vi siger, at "agenterne klarer resten", må der dog tages et lille forbehold. I 4.5.6 så vi, at der for en given pris, f.eks. den, der hører til en markedsligevægt, ikke nødvendigvis er en entydig bestemt løsning til PP. Når producent j derfor får besked om at maksimere profit, vil han måske vælge et y_j^1 forskelligt fra det y_j^0, som hørte til den Pareto-optimale tilstand.

I så fald fungerede decentraliseringen jo ikke, men man kan hævde, at problemet er mindre alvorligt: Der må jo gælde $p \cdot y_j^1 = p \cdot y_j^0$, så producenten har ingen grund til at modsætte sig en henstilling om i stedet at vælge y_j^0. Men der skal altså en kontakt til – man kan ikke nøjes med blot at meddele prisen.

5.6.4. Et andet problem, denne gang langt alvorligere, opstår, hvis visse af forudsætningerne for vort resultat ikke er opfyldt. I denne sammenhæng er det især konveksitetsforudsætningerne (F3 og P1), som vi bør være skeptiske overfor.

Ofte vil man imidlertid alligevel kunne decentralisere beslutningerne, selv om man så ikke kan nøjes med at meddele priser og indkomster. Vi vil give et eksempel på dette.

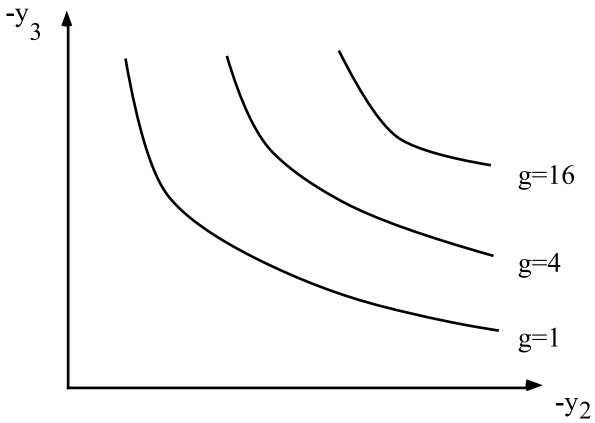
5.6.5. Lad $\mathcal{E} = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega)$ være en økonomi, hvor alle forbrugere opfylder F1, F2 og F3, og alle producenter på nær én (den første) opfylder P1. Den første producents produktionsmulighedsområde antages beskrevet ved en produktionsfunktion af typen

$$y_1 \leq g(y_2, \ldots, y_l)$$

(dvs. kun vare nr. 1 er output). Vi antager om funktionen g, at den er strengt quasikonkav, dvs.

$$g(y_2^1, \ldots, y_l^1) \geq g(y_2^0, \ldots, y_l^0) \text{ og}$$
$$(y_2^2, \ldots, y_l^2) = \lambda(y_2^1, \ldots, y_l^1) + (1-\lambda)(y_2^0, \ldots, y_l^0) \text{ for } 0 < \lambda < 1$$
$$\text{medfører } g(y_2^2, \ldots, y_l^2) > g(y_2^0, \ldots, y_l^0)$$

og monoton: $y_h^1 \leq y_h^0$, $h = 2, \ldots, l$, medfører $g(y_2^1, \ldots, y_l^1) \geq g(y_2^0, \ldots, y_l^0)$ (husk, at $y_2, \ldots, y_l$ er input og derfor negative). Produktionsmulighedsområdet beskrevet ved g er ikke nødvendigvis en konveks mængde – i Figur 5.10 har vi indtegnet isokvanter for en g med voksende skalaafkast.



Figur 5.10

5.6.6. Lad nu $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ være en Pareto-optimal tilstand med $x_i^0 \in \operatorname{int} X_i$ for $i = 1, \ldots, m$.

Beviset for Hovedsætning II (5.4.9) "virker" ikke længere – Y_1 er ikke konveks. Men lad os erstatte Y_1 med

$$\hat{Y}_1 = \{(y_1, \ldots, y_l) \in Y_1 \mid y_1 \leq y_{11}^0 \leq g(y_2, \ldots, y_l)\},$$

dvs. $\hat{Y}_1$ består af alle de mulige produktioner, som højst giver det output af vare 1, som er specificeret i den Pareto-optimale tilstand for virksomhed 1, og hvor input er tilstrækkeligt til at give dette output.

Bemærk, at $\hat{Y}_1$ er konveks og opfylder betingelsen $[y \in \hat{Y}_1$ og $y'_h \leq y_h$, alle $h] \Rightarrow y' \in \hat{Y}_1$, dvs. forudsætningerne P1(c) og (e). Da det faktisk kun er disse, som bruges i beviset for Hovedsætning II, får vi, at der findes et prissystem p og indkomster $R_1, \ldots, R_m$, således at markedsligevægtsbetingelserne er opfyldt for alle forbrugere og for producenterne $2, \ldots, n$.

For producent nr. 1 har vi, at y_1^0 maksimerer $p \cdot y$ på $\hat{Y}_1$. Men det vil jo sige, at y_1^0 maksimerer profit blandt alle $y \in Y_1$, for hvilke $y_1 = y_{11}^0$, eller y_1^0 minimerer omkostninger blandt alle de mulige produktioner, som giver netop det specificerede output af vare 1.

Det er altså lykkedes at decentralisere beslutningerne på den måde, at virksomhed 1 får foreskrevet sit output og endvidere får besked om at minimere omkostningerne. Bemærk dog, at dette ikke vil lykkes i alle situationer med voksende skalaafkast. I vort eksempel var produktionsmulighedsområdet trods alt temmelig "pænt". Men det giver et fingerpeg om, hvordan man kan bære sig ad.

5.6.7. Hvad er så den praktiske relevans af vore Hovedsætninger? Bliver de rent faktisk anvendt?

Både ja og nej. I helt bogstavelig forstand er der ingen økonomier, hvor man først finder frem til en ønskelig Pareto-optimal tilstand og dernæst finder de priser og indkomster, der gør denne tilstand til en markedsligevægt.

I et samfund af "vestlig" type er der jo ingen fælles (samfundsmæssig) målsætning, så problemstillingen bliver aldrig rigtig relevant. Men der er også problemer i samfund, hvor man har en (mere eller mindre konkret specificeret) målsætning for, hvad der skal laves. Vort resultat berører nemlig kun en del af de informationsstrømme, der er nødvendige – en eventuel samfundsplanlægger må jo kende en del til de enkelte agenters karakteristika (nyttefunktioner, produktionsmulighedsområder) for at finde frem til de Pareto-optimale tilstande. Og desuden har vi i det foregående kun sagt, at "der findes et prissystem", som decentraliserer beslutningerne, ikke hvordan man finder det – noget, som godt kan give problemer.

Ikke desto mindre er vort resultat uhyre vigtigt som et princip, der viser, hvorledes man skal gå frem. Visse af problemerne med at finde de ønskede tilstande kan løses ved, at man betragter processer, hvor der udveksles information mellem planlægger (centret) og agenterne, således at man skridtvis nærmer sig en ønskværdig Pareto-optimal tilstand.

5.7. Noter

5.7.1. Begrebet Pareto-optimalitet blev formuleret af Pareto (1909), men sammenhængen mellem optimalitet og ligevægt har under forskellige simplificerende forudsætninger været kendt endnu længere, i hvert fald siden Edgeworth (1881).

Den moderne behandling af emnet stammer fra perioden 1945-50 og var inspireret bl.a. af den sideløbende udvikling af lineær programmering.

5.8. Opgaver

5.8.1. Betragt følgende økonomi

$$\mathcal{E}^F = ((\mathbb{R}^2_+, S_i)^2_{i=1}, \omega),$$

hvor

$$S_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},$$
$$S_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}},$$
$$\omega = (2, 1)$$

(a) Er tilstanden $((\frac{4}{3}, \frac{2}{5}), (\frac{2}{3}, \frac{3}{5}))$ Pareto-optimal? Er den fair?
(b) Konstruér en markedsligevægt, hvori denne tilstand indgår.
(c) Kan der konstrueres en markedsligevægt, hvor $p_1 = 1$, $R_1 = 3$ og $R_2 = 2$?
(d) Samme spørgsmål som i (c) med $p_2 = 1$, $R_1 = 1$ og $R_2 = 1$.

5.8.2. Lad $\mathcal{E}^F = ((\mathbb{R}^2_+, S_i)^2_{i=1}, \omega)$ være en forbrugsøkonomi, hvor

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11} x_{12},$$
$$S_2(x_{21}, x_{22}) = 2x_{21} + x_{22},$$
$$\omega = (1, 1).$$

(a) Find de Pareto-optimale tilstande i økonomien.
(b) Konstruér en markedsligevægt, hvori tilstanden $((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}))$ indgår.
(c) Find mængden af fair tilstande.

5.8.3. Betragt følgende økonomi:

$$\mathcal{E}^F = ((\mathbb{R}^2_+, S_i)^2_{i=1}, \omega),$$

hvor

$$S_i(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\},\ i = 1, 2,\ \omega = (2, 4).$$

(a) Find mængden af Pareto-optimale tilstande i økonomien.
(b) Vis, at tilstanden $((2, 0), (0, 4))$ kan fås som markedsligevægt, og angiv et hertil hørende prissystem $p = (p_1, p_2)$ og indkomstfordeling R_1, R_2 til forbruger 1 og 2.

5.8.4. Betragt en økonomi med to forbrugere og to varer. Den ene forbruger har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionen

$$S_1(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1),$$

hvor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Den anden forbruger har præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionen

$$S_2(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

hvor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Den samlede initialbeholdning i økonomien er $\omega = (9, 9)$.

(a) Bestem mængden af Pareto-optimale tilstande i økonomien og illustrér denne mængde i en Edgeworth-boks.

(b) Der ønskes i denne økonomi en tilstand, som er Pareto-optimal og misundelsesfri i den forstand, at ingen af de to forbrugere ville foretrække den andens bundt for sit eget. Forklar, om kan man finde en sådan?

c) Find en tilstand som tilfredsstiller kravene i (b). Ifølge Hovedsætning II kan denne tilstand fås som markedsligevægt. Find ligevægtspriser og -indkomster.

5.8.5. Betragt en økonomi med to forbrugere og to varer. Forbruger 1 har nyttefunktionen

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = \log x_{11} + x_{12},$$

hvor $x_{11} > 0$, $x_{12} \geq 0$ er forbruger 1's forbrug af vare 1 hhv. vare 2. Forbruger 2 har nyttefunktionen

$$S_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + 2\sqrt{x_{22}},$$

hvor $x_{21} \geq 0$, $x_{22} \geq 0$ er forbruger 2's forbrug af vare 1 hhv. vare 2.

(a) Tegn i en figur indifferenskurver for forbruger 2 svarende til nytten 6 og nytten 8. Opstil for begge forbrugere deres nyttemaksimeringsproblemer for priser $p_1 = 4$ og $p_2 = 2$ samt indkomst $R = 12$ og bestem løsningen til disse problemer.

(b) Antag, at økonomiens samlede initialbeholdning af de to varer er $\omega = (10, 10)$. Er tilstanden $((\frac{1}{2}, 6), (\frac{19}{2}, 4))$ Pareto-optimal? Bestem i bekræftende fald priser på varerne og indkomster til forbrugerne, så at denne tilstand fremkommer som en markedsligevægt.

6. Generelle ligevægte

6.1. Økonomier med privat ejendomsret. Walras-ligevægte

6.1.1. I dette kapitel skal vi betragte (forskellige typer af) generelle ligevægte. Herved forstås, at de forskellige agenter (forbrugere, producenter) har truffet valg, som er optimale ved de givne institutionelle betingelser, og at disse valg er indbyrdes konsistente.

Et eksempel på dette er markedsligevægtene, som blev introduceret i kapitel 5. Institutionen var her markedet bestemt ved prissystemet p (samt tildelingen af indkomster $R_1, \dots, R_m$). Tilstanden hørende til markedsligevægten er løsninger til FP (PP) for hver forbruger (producent), og valgene "passer sammen": Tilstanden er opnåelig.

Hvor de indkomster $R_1, \dots, R_m$, som tildeles forbrugerne i markedsligevægten, faktisk stammer fra, har vi ikke sagt noget om – de kan f.eks. være bestemt af en samfundsplanlægger. I det følgende vil vi imidlertid antage indkomsterne bestemt efter bestemte regler. Dette fører til en anden type generelle ligevægte – Walras-ligevægtene.

Historisk var Walras-ligevægtene i årtier eneste eksempel på en generel ligevægt, hvorfor fællesbetegnelsen, uden at der blev forvirring, kunne anvendes på denne type. Således er det ikke mere. Vi vil i kapitlet støde på flere andre typer af generelle ligevægte.

6.1.2. Det første, vi vil gøre, er at indføre *privat ejendomsret* i økonomien. Det skal nemlig i vor model være forbrugerens privatejede beholdninger af varer og hans andele i de enkelte virksomheder, der bestemmer hans indkomst. Vi må derfor være eksplicitte på dette punkt.

Formelt indfører vi en økonomi med privat ejendomsret

$$\mathcal{E}_P = \left((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m, (\theta_{ij})_{i=1}^m{}_{j=1}^n\right)$$

som en økonomi, hvor der i stedet for en samlet initialbeholdning for hele økonomien er specificeret en initialbeholdning for hver forbruger. Desuden er der for hver virksomhed j givet m tal θ_{ij}, $i = 1, \dots, m$, mellem 0 og 1 med $\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$ fortolket som den andel af virksomhed j's profit, som tilfalder forbruger i.

Disse θ_{ij} vil ofte blive kaldt profitandelene. De kan opfattes som en slags aktier i virksomhederne – men adskiller sig selvfølgelig fra "rigtige" aktier ved at de ikke kan omsættes (i vor model) og ved, at forbruger i's del af profitudbetalingen, $\theta_{ij} p \cdot y_j$, fra virksomhed j, i princippet kan blive negativ.

6.1.3. I denne økonomi $\mathcal{E}_P$ vil vi nu indføre institutionen markeder (bestemt ved et prissystem). Vi vil da, for ethvert prissystem p og produktionsplaner $y_1, \ldots, y_n$ i virksomhederne, få indkomsterne $R_1, \ldots, R_m$ til forbrugerne bestemt ved

$$R_i = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j, \ i = 1, \ldots, m,$$

dvs. forbruger i's indkomst er lig værdien af hans initialbeholdning plus de dele af virksomhedernes profit, som han får ifølge sine "aktier" θ_{ij}, $j = 1, \ldots, n$.

En Walras-ligevægt er en markedsligevægt, hvor indkomsterne $R_1, \ldots, R_m$ er bestemt som ovenfor. Mere præcist har vi følgende definition:

En tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *og en pris* $p^0 = (p_1^0, \ldots, p_l^0)$ *er en Walras-ligevægt, hvis*

(i) tilstanden $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *er opnåelig,*

(ii) for alle i *gælder:* x_i^0 *maksimerer* S_i *på mængden*

$$\left\{ x \in X_i \,\middle|\, p^0 \cdot x \le p^0 \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^0 \cdot y_j^0 \right\}$$

(iii) for alle j *gælder:* y_j^0 *maksimerer* $p^0 \cdot y$ *på* Y_j.

6.1.4. I det følgende vil vi undertiden for at gøre argumentationen simplere udelade producenterne, dvs. betragte økonomier af typen

$$\mathcal{E}_P^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (\omega_i)_{i=1}^m).$$

Definitionen af Walras-ligevægte for sådanne økonomier overlades til læseren. I stedet vil vi bemærke, at det forhold, at $(x_1^0, \ldots, x_m^0, p^0)$ er en Walras-ligevægt, kan udtrykkes ved, at $(x_1^0, \ldots, x_m^0, p^0)$ er løsning til ligningssystemet

$$(*) \qquad \begin{aligned} & x_i = \xi_i(p, p \cdot \omega_i), \ i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \omega_i. \end{aligned}$$

Her er ξ_i den i'te forbrugers efterspørgselsfunktion (jfr. 3.3.8).

6.1.5. Ligningssystemet (*) består af $(m+1)l$ ligninger (idet hver af de anførte ligninger er en vektor-ligning for vektorer med l koordinater). De ubekendte er alle varebundterne $x_1, \ldots, x_m$ og p, dvs. i alt $(m+1)l$ ubekendte.

Det er en uudryddelig folklore, at et ligningssystem med lige mange ligninger og ubekendte har én løsning. Det er ikke desto mindre galt, som man vil se af følgende to ligningssystemer

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

med henholdsvis ingen og uendelig mange løsninger. Dette er endda lineære ligninger, mens vort system (*) normalt er ikke-lineært.

6.1.6. De gamle "lignings-tællere" kom imidlertid i vanskeligheder af en hel anden grund: Lad nemlig $(x_1^0, \dots, x_m^0, p^0)$ være en løsning til systemet (*) i 6.1.4 og $\lambda > 0$ et tal. Da er

$$\xi_i(\lambda p^0, \lambda p^0 \cdot \omega_i) = \xi_i(p^0, p^0 \cdot \omega_i)$$

for alle i (jfr. 3.5.1), og følgelig er $(x_1^0, \dots, x_m^0, \lambda p^0)$ også en løsning. Man siger, at priserne kun er bestemt på nær (eller "modulo") en multiplikativ skalar. Når man skal løse systemet, kan man således starte med at sætte en af priserne p_h^0 til 1. Den pågældende vare kaldes da en *numéraire* (priserne måles relativt til prisen på vare h).

Men derved har vi jo fundet, at der kun er $(m+1)l - 1$ ubekendte i systemet (*).

6.1.7. Der er imidlertid heller ikke $(m+1)l$ "rigtige" ligninger i systemet: Én af dem kan udledes af de andre, således at der højst er $(m+1)l - 1$ uafhængige ligninger. For at se dette vil vi benytte os af et meget nyttigt lille resultat, som går under betegnelsen Walras' lov. Vi definerer overskudsefterspørgselsfunktionen

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, p \cdot \omega_i) - \sum_{i=1}^{m} \omega_i.$$

Der gælder da, at værdien af overskudsefterspørgslen er 0:

Lad $\mathcal{E}_P^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (\omega_i)_{i=1}^m)$ være en økonomi med privat ejendomsret, hvor forbrugerne opfylder F1 og F2. Da er $p \cdot \zeta(p) = 0$ for ethvert p med $p_h > 0$, $h = 1, \dots, l$.

BEVIS: For hver forbruger i gælder ifølge 3.3.6(ii), at

$$p \cdot \xi_i(p, p \cdot \omega_i) = p \cdot \omega_i.$$

Summeres over i, fås $p \cdot \sum_{i=1}^m \xi_i(p, p \cdot \omega_i) = p \cdot \sum_{i=1}^m \omega_i$ eller $p \cdot \zeta(p) = 0$. □

Antag nu, at $(x_1^0, \dots, x_m^0, p^0)$ er en løsning til de første $(m+1)l - 1$ ligninger i (*). Vi kan da vise, at den sidste ligning

$$\sum_{i=1}^{m} x_{il}^0 = \sum_{i=1}^{m} \omega_{il}$$

automatisk må være opfyldt. Vi har nemlig ifølge Walras' lov

$$\sum_{h=1}^{l} p_h^0 \sum_{i=1}^{m} \xi_{ih}(p^0, p^0 \cdot \omega_i) = \sum_{h=1}^{l} p_h^0 \sum_{i=1}^{m} \omega_{ih},$$

hvoraf ved indsætning

$$\sum_{h=1}^{l} p_h^0 \sum_{i=1}^{m} (x_{ih}^0 - \omega_{ih}) = 0.$$

De første $l-1$ led i denne sum er 0. Derfor er også det sidste led 0,

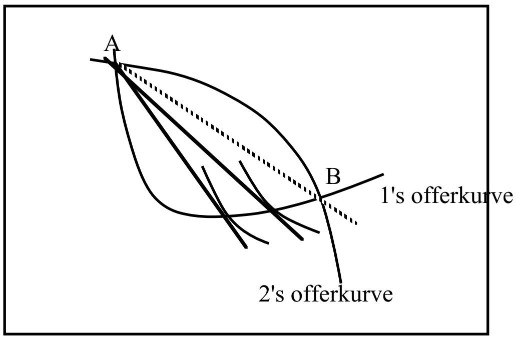
$$p_l^0 \sum_{i=1}^{m} (x_{il}^0 - \omega_{il}) = 0.$$

Da $p_l^0 > 0$, får vi $\sum_{i=1}^{m} (x_{il}^0 - \omega_{il}) = 0$, dvs. $(x_1^0, \ldots, x_m^0, p^0)$ opfylder også den sidste ligning.

Som vi bemærkede i 6.1.5, har vi ikke så meget fornøjelse af at vide, at der er lige mange ligninger og ubekendte. Eksistens af løsning til (*) eller ækvivalent hermed, eksistens af Walras-ligevægte, kræver et særskilt argument, som vi tager op i næste afsnit. Men undervejs har vi i hvert fald vist Walras' lov, som er nyttig også i andre sammenhænge.

6.1.8. Til afslutning vil vi se, hvorledes Walras-ligevægtene kan illustreres i Edgeworth-boksen:

Til forskel fra situationen i kapitel 5 har vi nu en ekstra oplysning: fordelingen af initialbeholdningen blandt forbrugerne. I Figur 6.1 nedenfor er denne angivet ved punktet A.



Figur 6.1

Til enhver pris $p = (p_1, p_2)$ får vi forbruger 1's budgetmængde bestemt ved linien med hældning $-p_1/p_2$ gennem A, idet hans indkomst er $p \cdot \omega_i$. Forbrugerens efterspørgsel er som vanlig karakteriseret ved, at budgetlinien er tangent til indifferenskurven i punktet.

På figuren har vi indtegnet forskellige alternative prissystemer og tilhørende efterspørgsel. Forbindes disse, fås forbruger 1's *offerkurve.* Tilsvarende kan vi indtegne forbruger 2's offerkurve på figuren (her har vi kun tegnet kurven, konstruktionen er underforstået).

Lad B være et skæringspunkt for offerkurverne. På figuren er der kun ét (bortset fra punktet A, som ikke regnes med), men med en anden form af offerkurverne kunne der sagtens være flere. Linien, som forbinder A og B, giver en ligevægtspris, dvs. prisen og den tilstand (x_1^0, x_2^0), der svarer til B, er en Walras-ligevægt (hvorfor?).

6.2. Eksistens af Walras-ligevægte

6.2.1. Vi har tidligere (2.1.10, 3.3.4, 4.5.4) beskæftiget os med eksistensproblematikken. Formålet med (i vor aktuelle situation) at vise, at der findes Walras-ligevægte, er at sikre sig, at modellen er konsistent – der er ikke megen grund til at interessere sig for tilstande, som ikke vil kunne indtræffe i modellen.

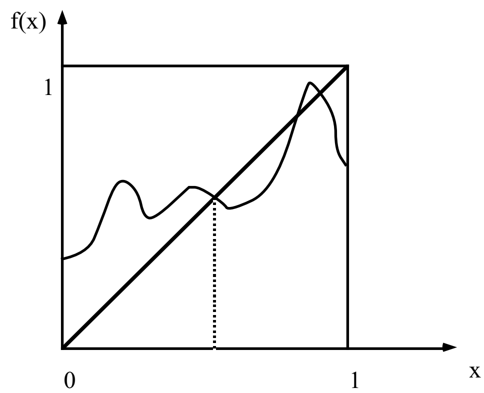
En overvejelse af, om modellen er konsistent, hører naturligt med i behandlingen af enhver model – også uden for mikroteorien. Når man ikke erindrer sig at have brugt nævneværdig tid derpå, f.eks. ved Keynes-modellen, skyldes det, at denne model – i hvert fald i lærebogsudgaven – er så simpel, at den let kan overskues.

Det er ikke tilfældet her – vi kræver, at der skal være et prissystem p^0, således at de enkelte forbrugeres efterspørgsel ved dette prissystem netop summer til den samlede initialbeholdning (eller, hvis vi også har producenter med, til summen af de profitmaksimerende produktioner plus initialbeholdningen). Det er bestemt ikke oplagt.

6.2.2. Beviset for, at der findes Walras-ligevægte i modellen, benytter et specielt matematisk resultat, den såkaldte Brouwers fikspunktsætning.

Lad $K \subset \mathbb{R}^l$ være en ikke-tom, konveks og kompakt mængde, og $f : K \to K$ en kontinuert funktion fra K ind i sig selv. Da findes der et punkt $x \in K$, således at $f(x) = x$.

Sætningen er forholdsvis oplagt for $l = 1$ (se Figur 6.2): Lad f.eks. K være intervallet $[0, 1]$. Da må grafen af enhver kontinuert funktion f fra $[0, 1]$ til $[0, 1]$ skære diagonalen et eller andet sted – dette er netop fikspunktet.



Figur 6.2

For $l > 1$ er sætningen ret svær at vise, og vi skal ikke forsøge. Læg i øvrigt mærke til, at resultatet er, hvad man kalder ikke-konstruktivt: Det siger, at der findes et fikspunkt, ikke hvordan man finder det. Der findes algoritmer, der kan bruges til at beregne fikspunkter; de er dog så tilpas komplicerede, at de ikke anvendes synderlig meget i praksis.

6.2.3. Vi vil i det følgende betragte en økonomi uden producenter; argumentet er det samme, men lidt mere teknisk, for økonomier med producenter. Vort resultat er følgende:

> *Lad* $\mathcal{E}_P^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (\omega_i)_{i=1}^m)$ *være en økonomi med privateje, hvor forbrugerne opfylder F1, F2 og F3, og hvor* $\omega_i \in \operatorname{int} X_i$*,* $i = 1, \ldots, m$*. Da findes der en Walras-ligevægt* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, p^0)$ *i* $\mathcal{E}_P^F$*.*

6.2.4. I vor søgen efter bundter og priser, som udgør en Walras-ligevægt, vil vi indskrænke os til sådanne prissystemer $p = (p_1, \ldots, p_l)$, for hvilke $\sum_{h=1}^l p_h = 1$. Vi udtrykker dette ved at sige, at p skal tilhøre mængden

$$\triangle = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^l \;\middle|\; \sum_{h=1}^l x_h = 1 \right\}.$$

Denne mængde er konveks og kompakt.

Vi vil også indskrænke mængden af bundter, som vi vil betragte, på følgende måde: Først vælges et tal K, som er større end, hvad en vilkårlig forbruger kan få af nogen vare i en hvilken som helst opnåelig tilstand:

Hvis $(x_1, \ldots, x_m)$ er en opnåelig tilstand, er

$$\sum_{i=1}^m x_{ih} = \sum_{i=1}^m \omega_{ih}, \; h = 1, \ldots, l,$$

så

$$x_{ih} = \sum_{i=1}^m \omega_{ih} - \sum_{k \neq i} x_{kh}.$$

Lad $\underline{x}_k$ være en nedre begrænsning for X_k (findes ifølge F1) valgt således, at alle koordinater er ikke-positive. Da er $-x_{kh} \leq -\underline{x}_{kh}$ for alle forbrugere $k \neq i$, og da $\underline{x}_{ih} \leq 0$, får vi

$$x_{ih} \leq \sum_{i=1}^m \omega_{ih} - \sum_{i=1}^m \underline{x}_{ih}.$$

Vi kan derfor vælge K som

$$K = 1 + \max_{h=1,\ldots,l} \left\{ \sum_{i=1}^m [\omega_{ih} - \underline{x}_{ih}] \right\}.$$

Vi definerer nu indskrænkede (eng. truncated) forbrugsmulighedsområder $\hat{X}_i$ for hver forbruger i ved

$$\hat{X}_i = \{x \in X_i \mid x_h \leq K,\ h = 1, \dots, l\}.$$

Da er $\hat{X}_i$ konveks og (dette var formålet med konstruktionen) kompakt for hvert $i = 1, \dots, m$.

6.2.5. Vi vil nu indføre de indskrænkede efterspørgselsfunktioner $\hat{\xi}_i : \triangle \to \hat{X}_i$ for $i = 1, \dots, m$: For hvert $p \in \triangle$ er $\hat{\xi}_i(p)$ det element i $\hat{X}_i$, som maksimerer S_i under bibetingelsen $p \cdot x \leq p \cdot \omega_i$.

At $\hat{\xi}_i(p)$ er veldefineret, er oplagt: Mængden $\hat{X}_i \cap \{x \in \mathbb{R}^l \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega_i\}$ er kompakt og ikke-tom (idet ω_i ligger i mængden). Altså har S_i et maksimum på denne mængde – og det er netop $\hat{\xi}_i(p)$.

Der gælder, at $p \cdot \hat{\xi}_i(p) = p \cdot \omega_i$; argumentet er ligesom i 3.3.6(ii). Endelig er funktionen $\hat{\xi}_i$ kontinuert i ethvert punkt $p \in \triangle$. Også her følger beviset samme linjer som ved kontinuiteten af ξ_i.

Vi kan så endelig definere den (indskrænkede) overskudsefterspørgselsfunktion $\hat{\zeta} : \triangle \to \mathbb{R}^l$ ved

$$\hat{\zeta}(p) = \sum_{i=1}^{m} \hat{\xi}_i(p) - \sum_{i=1}^{m} \omega_i.$$

Der må da gælde, at $\hat{\zeta}$ er kontinuert og opfylder Walras' lov: For alle $p \in \triangle$ er $p \cdot \hat{\zeta}(p) = 0$.

6.2.6. Vi nærmer os nu anvendelsen af fikspunktsætningen. Hertil betragtes nemlig afbildningen $U : \triangle \to \mathbb{R}^l$ defineret ved, at den h'te koordinatfunktion er

$$U_h(p) = \frac{p_h + \max\{\hat{\zeta}_h(p), 0\}}{1 + \sum_{k=1}^{l} \max\{\hat{\zeta}_k(p), 0\}}$$

for $h = 1, \dots, l$. Det, der sker ved denne funktion, er følgende: Hvis der er positiv overskudsefterspørgsel efter en vare h, lægges denne til varens pris, hvorved tælleren vokser. Er overskudsefterspørgslen negativ, sker der ikke noget med tælleren, men da vil nævneren sikre, at $U_h(p)$ bliver mindre end p_h. Vi kan derfor opfatte afbildningen U som en tilpasning af priserne.

Vi har, at $U_h(p) \geq 0$ for alle p, idet tælleren er ikke-negativ og nævneren ikke kan blive mindre end 1. Der gælder også

$$\sum_{h=1}^{l} U_h(p) = \sum_{h=1}^{l} \frac{p_h + \max\{\hat{\zeta}_h(p), 0\}}{1 + \sum_{k=1}^{l} \max\{\hat{\zeta}_k(p), 0\}} = 1,$$

så $U(p) \in \triangle$ for alle $p \in \triangle$. Endelig er U kontinuert, fordi $\hat{\zeta}$ er det.

6.2.7. Funktionen U opfylder således alle betingelserne i sætning 6.2.2 og har derfor et fikspunkt p^0. Der må så gælde

$$p_h^0 = U_h(p^0) = \frac{p_h^0 + \max\{\hat{\zeta}_h(p^0), 0\}}{1 + \sum_{k=1}^{l} \max\{\hat{\zeta}_k(p^0), 0\}}$$

eller

$$p_h^0(1 + \sum_{k=1}^{l} \max\{\hat{\zeta}_k(p^0), 0\}) = p_h^0 + \max\{\hat{\zeta}_h(p^0), 0\},$$

hvoraf

$$p_h^0 \sum_{k=1}^{l} \max\{\hat{\zeta}_k(p^0), 0\} = \max\{\hat{\zeta}_h(p^0), 0\}$$

for alle h.

Af denne ligning ses, at hvis $\hat{\zeta}_k(p^0) > 0$ for blot ét k, dvs. hvis

$$\sum_{k=1}^{l} \max\{\hat{\zeta}_k(p^0), 0\}$$

er positiv, må der for hvert $h = 1, \ldots, l$ gælde, at $\hat{\zeta}_h(p^0)$ er > 0, netop når $p_h^0 > 0$. Det vil sige, at vi kun kan have $\hat{\zeta}_h(p^0) \le 0$, hvis $p_h^0 = 0$. Men så får vi

$$\sum_{h=1}^{l} p_h^0 \hat{\zeta}_h(p^0) > 0$$

i strid med Walras' lov. Vi har altså, at $\hat{\zeta}_h(p^0) \le 0$ *for alle* h.

Faktisk må der gælde $\hat{\zeta}_h(p^0) = 0$, alle h, for hvis $\hat{\zeta}_h(p^0) < 0$, må vi have $p_h^0 = 0$ ifølge Walras' lov. Men $p_h^0 = 0$ betyder, at den h'te vare intet koster, og da forbrugeren opfylder F1 – F3 og derfor F2' (5.2.3), vil han efterspørge så meget som muligt af vare h, dvs. $\hat{\zeta}_h(p^0) = K > 0$ i strid med $\hat{\zeta}_h(p^0) \le 0$.

6.2.8. Vi har nu fundet en pris p^0, således at $\hat{\zeta}(p^0) = 0$. Vi mangler nu blot at vise, at tilstanden $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, hvor $x_i^0 = \hat{\xi}_i(p^0)$, $i = 1, \ldots, m$, og prisen p^0 er en Walras-ligevægt.

At tilstanden er opnåelig, følger af, at $\hat{\zeta}(p^0) = 0$, dvs. $\sum_{i=1}^{m} \hat{\xi}_i(p^0) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$. Heraf får vi også, at $x_{ih}^0 < K$ for alle i og h.

Antag nu, at der var et bundt $x_i^1 \in X_i$, således at $p \cdot x_i^1 \le p \cdot \omega_i$ og $S_i(x_i^1) > S_i(x_i^0)$. Vælg et λ, således at $0 < \lambda < 1$, og der om

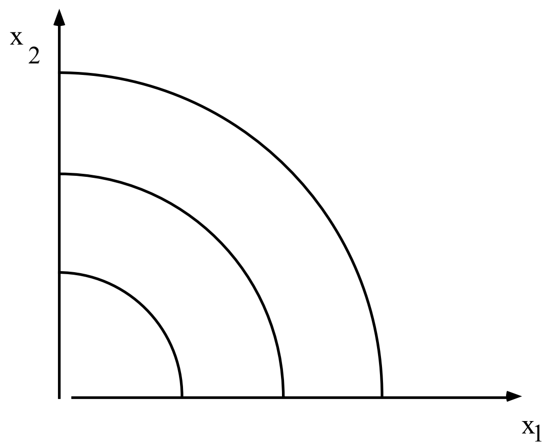
$$x_i^2 = \lambda x_i^1 + (1 - \lambda) x_i^0$$

gælder, at $x_{ih}^2 \leq K$, alle h. Da er $p \cdot x_i^2 \leq p \cdot \omega_i$. Ifølge F3 har vi $S_i(x_i^2) > S_i(x_i^0)$. Men så har vi fundet et bundt i $\hat{X}_i$, som opfylder budgetbetingelsen og er bedre end $\hat{\xi}_i(p^0)$, en modstrid. Følgelig er $x_i^0 = \xi_i(p^0)$, alle i, og vi er færdige.

6.2.9. For at give en fornemmelse af, at vi ikke har hældt overflødige forudsætninger på økonomien for at få vort resultat, vil vi give et eksempel på en økonomi, hvor det går galt – dvs. en økonomi, hvor der ikke findes Walras-ligevægte.

Da vi tidligere har noteret os, at F3 er den mindst acceptable af vore standardforudsætninger om forbrugeren, vil vi her vise, at den er væsentlig. Så i vort eksempel er alle forudsætninger opfyldt på nær F3.

Den økonomi, vi betragter, har to forbrugere. Der er to varer, og de to forbrugere har samme forbrugsmulighedsområde $\mathbb{R}_+^2$ og nyttefunktion $S(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; indifferenskurverne er kvartcirkler med centrum i $(0, 0)$ (se Figur 6.3). Initialbeholdningerne er $\omega_1 = (3, 4)$ og $\omega_2 = (2, 1)$.



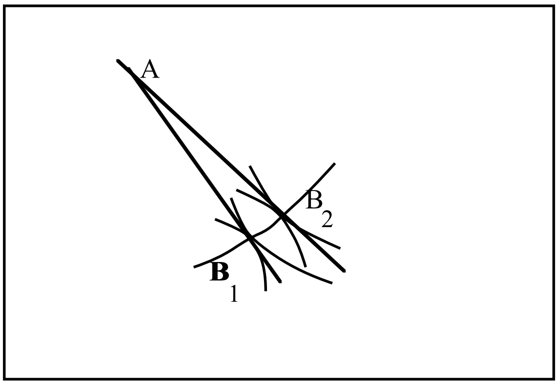
Figur 6.3

Lad nu $p = (p_1, p_2)$ være en vilkårlig pris. Med de givne præferencer vil begge forbrugere kun efterspørge vare 2, såfremt $p_1 > p_2$. Tilsvarende vil de, hvis $p_1 < p_2$, kun efterspørge vare 1. Der kan således ikke være ligevægt (idet der hertil kræves, at efterspørgslen skal være lig den samlede initialbeholdning, som er $(5, 5)$) medmindre $p_1 = p_2$.

Hvis $p_1 = p_2$, er forbrugernes efterspørgsel ikke entydigt bestemt: Forbrugerne vil enten kun købe vare 1 eller kun vare 2. Hvis begge køber samme vare, er der (ligesom ovenfor) ikke ligevægt. Men heller ikke, hvis de køber hver sin vare, lykkes det – forbruger 2 vil med sin lille initialbeholdning have mindre at købe for end forbruger 1, og der kan da ikke blive købt lige meget af begge varer, dvs. 5 stk. af hver.

Konklusion: Der er ikke nogen Walras-ligevægt.

6.2.10.* Som afslutning vil vi (uden bevis) nævne, at man kan vise eksistens af Walras-ligevægte også i økonomier med produktion. Der gælder:



Figur 6.4

Lad $\mathcal{E}_P = \big((X_i, S_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m, (\theta_{ij})_{i=1}^m{}_{j=1}^n\big)$ være en økonomi med privat ejendomsret, hvor

(i) forbrugerne opfylder F1, F2 og F3,

(ii) $\omega_i \in \operatorname{int} X_i$, $i = 1, \ldots, m$,

(iii) det samlede produktionsmulighedsområde $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$ opfylder P1.

Da findes der en Walras-ligevægt $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, p^0)$ i $\mathcal{E}_P$.

6.3. Walras-ligevægte: Entydighed og stabilitet

6.3.1. I hele dette afsnit vil vi, for at gøre vores diskussion så simpel som mulig, holde os til en økonomi uden producenter.

Ifølge vor indarbejdede tradition skal vi nu, efter at have fået eksistensproblemet fra hånden, betragte problemet om entydighed af ligevægte: Findes der i en given økonomi én eller flere Walras-ligevægte?

I en vis (triviel) forstand findes der altid uendelig mange. Vi har set, at hvis $(x_1^0, \ldots, x_m^0, p^0)$ er en Walras-ligevægt og $\lambda > 0$, da er også $(x_1^0, \ldots, x_m^0, \lambda p^0)$ en Walras-ligevægt. Sådanne ligevægte, hvor den eneste forskel er, at priserne er ganget med en skalar, vil vi opfatte som identiske. Men kan der være flere (virkeligt) forskellige Walras-ligevægte?

Svaret er ja. Der vil i almindelighed være flere Walras-ligevægte. Et eksempel er en simpel økonomi med to forbrugere, illustreret i en Edgeworth-boks (Figur 6.4). Initialbeholdningen er givet ved punktet A. Det ses, at der er to forskellige fællestangenter til indifferenskurverne, som går igennem A. Og det vil jo sige (jfr. 6.1.8), at der er mindst to forskellige Walras-ligevægte i denne økonomi.

6.3.2.* Bemærk, at vi kunne risikere, at fællestangenten i ethvert punkt på kontraktkurven mellem B_1 og B_2 går igennem A. I så fald er der uendelig mange Walras-ligevægte.

Denne situation er dog temmelig speciel – hvis vi flytter A en lille smule, passer det ikke længere. Man kan vise, at sandsynligheden for, at initialbeholdningen er fordelt således, at der er uendelig mange ligevægte, er nul.

6.3.3. Ved særlige forudsætninger kan man sikre sig entydighed af Walras-ligevægte. Et eksempel på sådanne forudsætninger er følgende:

BRUTTO-SUBSTITUTION: *Den totale efterspørgselsfunktion* $\xi(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, p \cdot \omega_i)$ *er differentiabel i ethvert punkt* p *med* $p_h > 0$, $h = 1, \dots, l$, *og der gælder*

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial p_h} > 0$$

for alle h, k *med* $h \neq k$.

Forudsætningen siger, at hvis prisen på en vare stiger, vil den samlede efterspørgsel efter alle andre varer vokse (som helhed substitueres der over til de andre varer). Dette er ikke en "pæn" forudsætning: Den handler om noget afledet (den samlede efterspørgsel). I mikroøkonomien foretrækker vi forudsætninger om de enkelte agenter, f.eks. forbrugere og producenter, frem for forudsætninger om den samlede gruppe af forbrugere eller producenter.

En måde, hvorpå forudsætningen kan være opfyldt, er, at der for hver forbruger i gælder, at

$$\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial p_h} > 0$$

for $h \neq k$.

I Figur 6.1 (jfr. 6.1.8) ses dette at være ensbetydende med, at offerkurven gennem et vilkårligt punkt B skal gå fra nordvest mod sydøst. Det er da let at se, at Walras-ligevægten i en Edgeworth-boks vil være entydigt bestemt. Men med vore standardforudsætninger om forbrugeren er der intet, som sikrer et sådant forløb.

Bemærk, at efterspørgselsfunktionen ξ er homogen af 0'te grad, idet hver enkelt af funktionerne ξ_i er det. Ifølge Eulers ligning gælder da

$$\sum_{h=1}^{l} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_h} p_h = 0$$

for hvert k. Her er, under vor forudsætning, alle led positive på nær det k'te, som derfor må være negativt. For den k'te vare må vi derfor have $\partial \xi_k / \partial p_k < 0$.

6.3.4. Antag nu, at $(x_1^0, \dots, x_m^0, p^0)$ og $(x_1^1, \dots, x_m^1, p^1)$ er to forskellige Walras-ligevægte, hvor prisvektorerne p^0 og p^1 ikke er proportionale og har positive koordinater. Vi kan antage, at $p_h^0 \leq p_h^1$ for alle h, og $p_k^0 = p_k^1$ for et vist k (hvis det ikke er opfyldt, kan vi blot gange p^0 med skalaren $\min_{h=1,\dots,l}(p_h^1/p_h^0)$). Lad nu p_k være konstant og lad de øvrige priser vokse fra p_h^0 til p_h^1. Da vil ifølge bruttosubstitutionsforudsætningen ξ_k *vokse hele vejen*, således at den er større i p^1

end i p^0. Men så kan p^0 og p^1 ikke begge være ligevægtspriser, idet der da måtte gælde $\xi_k(p^0) = \xi_k(p^1) = \sum_{i=1}^m \omega_{ik}$.

6.3.5. Når Walras-ligevægtene ikke er entydigt bestemt, kommer der problemer med at gennemføre *komparativ-statiske* analyser.

I komparativ-statiske analyser starter man med en Walras-ligevægt i en økonomi $\mathcal{E}_P^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (\omega_i)_{i=1}^m)$ og ændrer derefter på udgangsbetingelserne, f.eks. på initialbeholdningernes størrelse og deres fordeling blandt forbrugerne. I den nye økonomi vil der da være én (eller flere) Walras-ligevægte. Typisk er man da interesseret i at vide, hvad der er sket med ligevægtspriserne. Men hvis der i den nye økonomi er flere Walras-ligevægte, hvilken en af dem skal man da sammenligne med den ligevægt, man startede med?

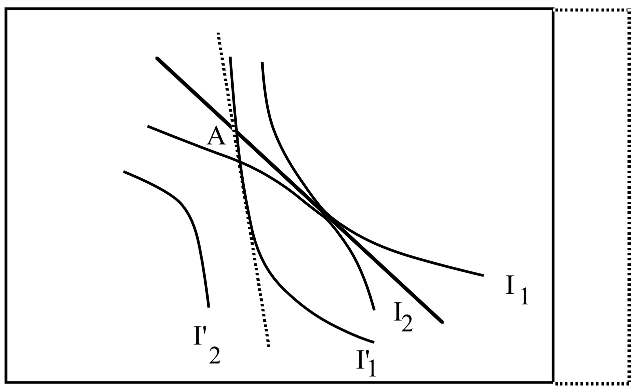
6.3.6.* Hvis forudsætningen fra 6.3.3 om, at alle varer er brutto-substitutter, er opfyldt, er ligevægtene entydigt bestemt, og man kan vise, at der gælder f.eks.

(i) hvis initialbeholdningen af en bestemt vare h øges for alle forbrugere (dette kunne kaldes "reduceret knaphed på vare h"), da vil prisen på vare h falde relativt til prisen på de andre varer,

(ii) hvis der omfordeles af alle varer til en agent i fra alle andre agenter, da vil prisen stige (relativt) på de varer, for hvilke agent i har den største indkomsteffekt.

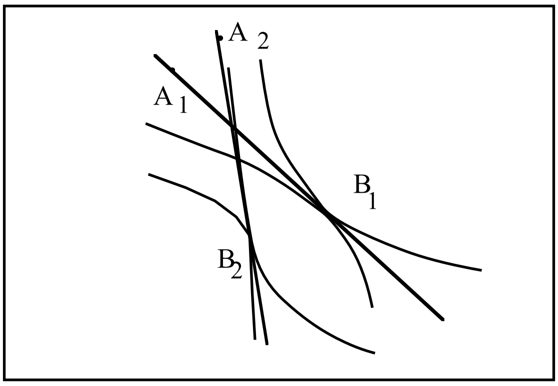
Disse resultater er for så vidt intuitive; derfor – men især fordi de beror på den ubehagelige forudsætning om brutto-substitution – vil vi ikke vise dem. Vi skal blot bemærke, at det er let at finde eksempler, hvor disse intuitive udsagn er forkerte.

Modeksempel til (i) (se Figur 6.5): Vi vil her antage, at forbruger 2's beholdning af vare 1 øges, alt andet uforandret. Vi starter i punktet A (og samlet initialbeholdning bestemmer den fuldt optrukne boks). Ligevægten er bestemt ved fællestangenten til I_1 og I_2 (indifferenskurver for forbruger 1 og 2) gennem A.



Figur 6.5

Når vi øger forbruger 2's beholdning af vare 1, bliver boksen og forbruger 2's indifferenskurver trukket til højre. Derved kommer I'_2 hen til I'_1, således at det



Figur 6.6

nye prisforhold bliver bestemt ved den skraverede linie. Derved er prisen på vare 1 steget relativt.

Modeksempel til (ii) (se Figur 6.6) : I figuren starter vi med initialbeholdningen A_1. Bemærk, at med de indifferenskurver, vi har angivet for forbruger 1 og 2 omkring udgangssituationen B_1, vil en parallelforskydning af linien gennem A_1 og B_1 medføre, at forbruger 1 næsten kun ændrer sin efterspørgsel efter vare 2 – den har altså stor indkomsteffekt.

Vi tager nu fra forbruger 2's beholdning og giver til forbruger 1. Derved går vi fra A_1 til A_2. Ligevægten ændres fra B_1 til B_2 – vare 2 er blevet (relativt) billigere. Bemærk i øvrigt, at der i eksemplet sker det overraskende, at forbruger 2 er endt i en bedre situation, selvom han måtte aflevere af sin beholdning af begge varer til forbruger 1.

6.3.7. Det sidste problem, som vi vil betragte i dette afsnit, er følgende: Givet, at der i økonomien er en (eller flere) ligevægt(e), hvordan finder man dem? Eller mere præcist – idet vi uddyber ordet "man" – kan vi angive en procedure, der startende fra et vilkårligt prissystem p, som almindeligvis ikke vil være en ligevægtspris, gennem en serie af tilpasninger af priserne leder til en ligevægtspris?

Der er en mulighed, som har en vis intuitiv appel. Hvis efterspørgslen efter vare h er større end udbuddet af vare h, tyder det på, at vare h er "for billig", og prisen på vare h hæves. I det modsatte tilfælde sænkes prisen.

Bemærk, at denne problemstilling er dynamisk: Vi betragter et forløb over tid (nemlig ændringen i prissystemet). Det kan derfor betale sig at formulere problemet således, at tiden indgår eksplicit i beskrivelsen. Desuden vil vi betragte en tilpasningsproces, som er mere intuitiv end den, vi får fra funktionen U (afsnit 6.2.6), som jo var konstrueret med et andet formål for øje.

Den mest oplagte tilpasningsproces er følgende:

$$(*) \qquad \frac{dp_h}{dt} = a_h \zeta_h(p(t)), \ h = 1, \ldots, l,$$

hvor $a_h > 0$ er en konstant. På tidspunkt t noteres prisen $p(t)$, og prisen på vare h ændres da opefter (nedefter), hvis der er positiv (negativ) overskudsefterspørgsel efter vare h.

Processen (*) kaldes en *tâtonnement-proces*. Heri ligger, at der, så længe prisen fortsat tilpasses og endnu ikke har nået ligevægtsprisen, *ikke finder handeler sted*. Vi kan forestille os, at forbrugerne er samlet i et auktionslokale. En auktionarius forkynder en vis pris (dvs. en l-vektor). Forbrugerne oplyser så, hvad de efterspørger ved denne pris. Herpå kan auktionarius ved hjælp af (*) udregne, hvorledes han skal ændre prisen. Dette fortsætter, indtil ligevægtsprisen er nået. Først derefter finder der faktisk handeler sted.

Denne beskrivelse mere end antyder, at som beskrivelse af virkelighedens pristilpasningsprocesser er (*) ikke meget værd (selv om der findes delmarkeder, hvor det ikke er så meget ved siden af). Man kunne godt indføre handeler uden for ligevægten – derved får man en såkaldt *non-tâtonnement proces* – men derved bliver processen mere indviklet, og da vores formål er at studere principperne i så enkle situationer som muligt, vil vi holde os til (*).

6.3.8. Vort problem er nu at finde ud af, om tilpasningsprocessen beskrevet ved (*) fører til en ligevægtspris.

Et system af differentialligninger som (*) kaldes et *dynamisk system*. Løsninger til systemet er funktioner $p(t)$, der viser, hvorledes p varierer over tiden. For forskellige valg af initialværdier $p(0)$ fås forskellige forløb over tid af løsningen. En vektor p^0, som gør alle højresiderne $= 0$, kaldes en *ligevægt* for systemet. Denne terminologi stemmer overens med vor egen, idet en sådan p^0 netop vil være en ligevægtspris.

Man siger, at en ligevægt p^0 for det dynamiske system er (globalt asymptotisk) *stabil*, hvis der for alle valg af $p(0)$ gælder, at $p(t) \to p^0$ for $t \to \infty$.

I vor situation kan vi ikke forvente et så stærkt stabilitetsresultat, idet vi jo har set, at hvis p^0 er en ligevægtspris, er λp^0 for $\lambda > 0$ det også. Bemærk, at der for en løsning $p(t)$ til (*) må gælde

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{l}\frac{1}{a_h}(p_h(t))^2\right) = \sum_{h=1}^{l}\frac{2}{a_h}p_h(t)\frac{dp_h(t)}{dt} = 2\sum_{h=1}^{l}p_h(t)\zeta_h(p(t)) = 0$$

ifølge Walras' lov, så størrelsen $\sum_{h=1}^{l} a_h^{-1}(p_h(t))^2$ må være konstant. I vor situation vil vi derfor sige, at p^0 er (globalt asymptotisk) stabil, hvis der for alle valg af $p(0)$ med $\sum_{h=1}^{l} a_h^{-1}(p_h(0))^2 = \sum_{h=1}^{l} a_h^{-1}(p_h^0)^2$ gælder $p(t) \to p^0$ for $t \to \infty$.

(En lille advarsel: Når vi siger, at ligevægten er stabil, er dette naturligvis noget, som knytter sig til den konkrete proces – her tâtonnement-processen (*). Man kan sagtens have Walras-ligevægte, hvor ligevægtsprisen er stabil for visse processer og ikke for andre).

Såfremt der er mere end én ligevægtspris, kan vi ikke få en sådan stabilitet – hvis vi i tidspunkt 0 starter i én ligevægt, bliver vi der og kommer derfor ikke til den anden. Men man kan så håbe på et lokalt stabilitetsresultat: startes i nærheden af en ligevægtspris, vil priserne gå mod ligevægten.

6.3.9. Om der gælder et resultat om stabilitet af ligevægte, viser sig at afhænge af, hvorledes ζ er specificeret. Hvad ved vi om ζ og dens egenskaber?

Klart nok opfylder ζ følgende tre betingelser:

(i) ζ er kontinuert,
(ii) ζ er homogen af 0'te grad,
(iii) for ethvert prissystem p er $p \cdot \zeta(p) = 0$.

Her er betingelse (iii) Walras' lov; betingelserne (i) og (ii) følger umiddelbart af de tilsvarende egenskaber for funktionerne ξ_i.

Overraskende nok er dette også de *eneste egenskaber,* som vi kan være sikre på, at ζ har. Der gælder nemlig følgende fundamentale resultat (som skyldes Debreu, 1974):

Lad $f : \triangle \to \mathbb{R}^l$ *være en kontinuert funktion, som opfylder* $p \cdot f(p) = 0$ *for alle* $p \in \triangle$, *og* $\varepsilon > 0$ *et positivt tal.*

Da findes der en økonomi $\mathcal{E}_P^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (\omega_i)_{i=1}^m)$ *med* m *forbrugere, hvor* $m \geq l$, *således at*

$$\zeta(p) = f(p)$$

for alle $p \in \triangle$ *med* $p_h \geq \varepsilon$, $h = 1, \ldots, l$.

Sagt på en anden måde – enhver kontinuert funktion, som opfylder Walras' lov, er overskudsefterspørgselsfunktion for en passende økonomi.

For vores problem betyder dette, at vi ikke kan håbe på generelle stabilitetsresultater. Der er nemlig konstrueret eksempler, hvor man har specificeret ζ i (*) på en sådan måde, at løsningerne $p(t)$ bliver "grimme" (f.eks. kan man startende fra visse punkter bevæge sig i ring uden at nå en ligevægt). Og vi ser af sætningen, at en sådan specificeret funktion kan optræde som overskudsefterspørgselsfunktion.

6.3.10.* For at antyde, hvorledes man i visse situationer kan vise stabilitet, vil vi antage, at ζ *opfylder det svage axiom for afslørede præferencer,* dvs. at der for alle p^1, p^2 gælder, at $p^1 \cdot \zeta(p^2) \leq 0$ og $\zeta(p^1) \neq \zeta(p^2)$ medfører $p^2 \cdot \zeta(p^1) > 0$ (sammenlign (3.6.2); bemærk i øvrigt, at dette *ikke* følger af, at hver enkelt ξ_i opfylder det svage axiom).

Lad os – for at gøre situationen så simpel som muligt – yderligere antage, at der kun er én ligevægtspris (naturligvis stadig i den forstand, som vi anførte i 6.3.1) p^0. Vi vil vise, at denne ligevægt er stabil.

Lad hertil p være valgt således, at $\sum_{h=1}^l a_h^{-1} p_h^2 = \sum_{h=1}^l a_h^{-1} (p_h^0)^2$ og $p(t)$ en løsning til (*) med $p(0) = p^0$ (her snyder vi en smule – vi har ikke gjort rede for, at der findes en sådan løsning til differentialligningen i (*)).

Vort første problem er at sikre, at processen ikke fører til negative priser. Men det følger let; hvis $p_h(t)$ for visse t-værdier bliver lille, dvs. hvis prisen på vare h bliver lille, vil alle forbrugere efterspørge store positive mængder af vare h (i hvert fald hvis F2' er opfyldt). Dette får ifølge (*) prisen på vare h til at stige.

Vi vil nu betragte en hjælpefunktion (i fagsproget hedder det en Ljapunov-funktion) D, defineret ved

$$D(t) = \sum_{h=1}^{l} \frac{1}{a_h}(p_h(t) - p_h^0)^2.$$

Vi har, at

$$\begin{aligned}\frac{dD(t)}{dt} &= 2\sum_{h=1}^{l} \frac{1}{a_h}(p_h(t) - p_h^0)\frac{dp_h(t)}{dt} \\ &= 2\sum_{h=1}^{l}(p_h(t) - p_h^0)\zeta_h(p(t)) = -2p^0 \cdot \zeta(p(t)),\end{aligned}$$

idet vi har brugt Walras' lov $\sum_{h=1}^{l} p_h(t)\zeta_h(p(t)) = 0$. Bemærk nu, at for hvert t er $p(t)\cdot\zeta(p^0) \leq 0$ (simpelt hen fordi $\zeta(p^0) = 0$), så hvis $p(t) \neq p^0$, må $p^0\cdot\zeta(p(t)) > 0$ (da ζ opfylder det svage axiom). Heraf får vi så, at funktionen D er aftagende.

Da D er aftagende (og positiv), må den for $t \to \infty$ gå mod en grænse $D^0 \geq 0$. Hvis $D^0 > 0$, kan vi af følgen $p(1), p(2), p(3), \ldots$, hvis elementer ligger i den kompakte mængde

$$\left\{ p \in \mathbb{R}_+^l \;\middle|\; \sum_{h=1}^{l} \frac{1}{a_h} p_h^2 = \sum_{h=1}^{l} \frac{1}{a_h}(p_h^0)^2 \right\},$$

udtage en delfølge, som går mod et vist $p^* \neq p^0$. Når $p(t)$ er tæt ved p^*, må $\frac{dD(t)}{dt}$ være tæt ved $-2p^0 \cdot \zeta(p^*)$, som er et vist negativt tal $\neq 0$. Men det strider mod, at D aftager mod en grænse $D^0 > 0$, for en funktion kan ikke samtidig gå mod en grænse og have afledet af en vis konstant størrelse $\neq 0$. Vi konkluderer $D^0 = 0$, hvoraf følger $p(t) \to p^0$.

6.4. Produktion og Walras-ligevægt: Et specialtilfælde

6.4.1. Vi vil nu se lidt nærmere på Walras-ligevægtene i en økonomi med produktion. Vi vil dog i hele dette afsnit forudsætte, at *alle producenter opfylder P2.*

Ud over dette vil vi antage, at *der i hver virksomhed kun er én output-vare,* at *alle varer på nær den l'te produceres af (mindst) én virksomhed,* mens *den l'te vare ikke kan produceres,* men *skal bruges som input* i enhver virksomhed, hvis denne skal have et output $\neq 0$. Denne l'te vare vil vi kalde "arbejdskraft".

I 4.4.2 bemærkede vi, at man i stedet for produktionsmulighedsområdet Y_j for producent j kunne angive den mængde A_j af processer, der står til rådighed for producenten. Dette vil vi benytte i det følgende.

6.4.2. Lad nu $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0, p^0)$ være en Walras-ligevægt, hvor der produceres noget af alle de $l-1$ varer, og hvor $p_l^0 > 0$. Denne sidste antagelse er ikke særligt indskrænkende: Vare l er jo nødvendig som input i alle virksomheder og vil derfor være efterspurgt. Når $p_l^0 > 0$, kan vi lige så godt antage $p_l^0 = 1$, dvs. alle priser måles relativt til prisen på arbejdskraft.

For hver vare $j = 1, \dots, l-1$ udvælger vi nu en virksomhed (som vi også vil kalde virksomhed nr. j), der har denne vare som output. Til produktionsplanen y_j^0, som er valgt i virksomhed j, svarer en proces $a_j^0 \in A_j$. Da profitten er 0 som følge af at P2 er opfyldt (4.5.5), må enhedsomkostningerne være lig færdigvareprisen, dvs.

(1) $$p_j^0 = \sum_{h=1}^{l-1} a_{jh}^0 p_h^0 + a_{jl}^0,\ j = 1, \dots, l-1.$$

Skrives disse ligninger på matrixform, får vi

(2) $$(I - A^0)p^0 = a_l^0,$$

hvor I er en $(l-1) \times (l-1)$ enhedsmatrix, A^0 matricen med elementer a_{jh}^0, $j, h = 1, \dots, l-1$, og a^0 er (søjle-)vektoren med koordinater $a_{1l}^0, a_{2l}^0, \dots, a_{l-1,l}^0$.

6.4.3. Om matricen $(I - A^0)$ gælder følgende:

(i) diagonalelementerne er alle $= 1$,

(ii) elementerne uden for diagonalen er ikke-positive (nemlig af formen $-a_{jh}^0$),

(iii) der findes positive tal $p_1^0, \dots, p_{l-1}^0$, således at hvis h'te søjle ganges med p_h^0, $h = 1, \dots, l-1$, da vil der i den nye matrix for hver række j gælde, at diagonalelementet er $>$ den numeriske værdi af summen af de øvrige elementer (det følger umiddelbart af (1): Forskellen mellem de to størrelser er $a_{jl}^0 > 0$).

En matrix, som opfylder betingelserne (i)-(iii), har en invers med alle elementer positive (se A.14). Lad det karakteristiske element i $(I - A^0)^{-1}$ være α_{hk}^0. Vi har da fra

$$p^0 = (I - A^0)^{-1} a_l^0$$

at

(3) $$p_h^0 = \sum_{k=1}^{l-1} \alpha_{hk}^0 a_{kl}^0,\ h = 1, \dots, l-1.$$

6.4.4. Vi har hermed fået et eksplicit udtryk for ligevægtspriserne i denne model. For at fortolke dette udtryk vil vi lave et tankeeksperiment:

Antag, at der i den betragtede økonomi i alt skal bruges én enhed af vare h. Det er klart, at vi ikke blot kan nøjes med at bede den h'te producent om at producere denne enhed, idet han dertil skal bruge input produceret af andre virksomheder, som måske skal bruge vare h som input.

Hvis q_k for $k = 1, \ldots, l-1$ betegner det output i de forskellige virksomheder, som er nødvendige for at realisere vort mål, én enhed af vare h, har vi, at

$$q_k - \sum_{j=1}^{l-1} a_{jk}^0 q_j = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq h, \\ 1 & \text{for } k = h, \end{cases}$$

idet venstre side er produceret mængde minus de andre producenters brug af varen til input. På matrixform svarer dette til ligningen

$$q^t(I - A^0) = e_h^t,$$

hvor ^{t} står for transponering og e_h er søjlevektoren, som har 1 på h'te plads, nul på resten. Vi får da

$$q^t = e_h^t(I - A^0)^{-1}$$

eller

$$q_k = \alpha_{hk}^0 \text{ for } k = 1, \ldots, l-1.$$

Sammenholdes dette med (3), får vi, at prisen på vare h er lig med den mængde arbejdskraft, som direkte eller indirekte medgår til at producere én enhed af varen.

6.4.5.* Bestemmelsen af priserne i vores model knytter an til den såkaldte arbejdsværdilære. I sytten- og attenhundredtallet søgte økonomerne en fælles målestok for varers værdi (idet man bl.a. var løbet ind i paradokset om vand, som er nyttigt og uden værdi, og diamanter, som er unyttige, men værdifulde). Blandt andre, mere eksotiske, forslag var det især arbejdsværdilæren, som hævdede sig: En vares værdi måles ved den mængde arbejde, som er nedlagt i varen – enten direkte ved dens produktion eller tidligere, i de rå- og hjælpestoffer, som benyttes.

Marx byggede på arbejdsværdilæren, og dette har muligvis været årsagen til, at senere generationer af økonomer har forsøgt at påvise denne teoris inkonsistens. Vi har set, at arbejdsværdilæren er konsistent; vi har netop i dette afsnit betragtet en model, hvor den holder. Noget andet er så, at modellens forudsætninger (som i øvrigt var almindeligt accepterede på Marx' tid) er meget restriktive. Slækker vi på dem, må vi modificere arbejdsværdilæren – så meget, at den hurtigt er helt forsvundet.

Når vi i modellen har arbejdsværdier, kan vi også indføre *merværdi*. Antag, at det gennemsnitlige forbrug pr. arbejder er $(l-1)$-vektoren $(c_1, \ldots, c_{l-1})$. Værdien af dette bundt $\sum_{h=1}^{l-1} p_h c_h$ er, hvad der i gennemsnit bruges (målt i arbejdsværdi) på at holde en arbejder i live ("reproducere" ham). Hvis han i den betragtede periode kan fås til at yde N arbejdstimer, fås merværdien som $N - \sum_{h=1}^{l-1} p_h c_h$.

6.4.6. Ligevægtspriserne i modellen hørende til ligevægte, hvor alle de $l-1$ varer produceres, er entydigt bestemt. Antag nemlig, at p^1 er en ligevægtspris med $p_l^1 = 1$, og lad a_j^1 være den proces, som svarer til den profitmaksimerende produktion ved p^1 for virksomhed j. Der må da gælde, at

$$p_j^0 \leq \sum_{h=1}^{l-1} a_{jh}^1 p_h^0 + a_{jl}^1$$

for alle j (idet processerne a_j^0, $j = 1, \ldots, l-1$, er bedst ved p^0) eller, på matrixform

$$(I - A^1)p^0 = a_l^1 + u,$$

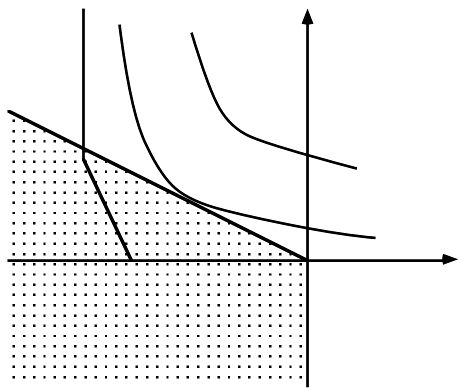
hvor u er en søjlevektor med ikke-positive koordinater. Da vi ligesom ved (2) i (6.4.2) har

$$(I - A^1)p^1 = a_l^1$$

fås ved subtraktion

$$(I - A^1)(p^0 - p^1) = u$$

eller $p^0 - p^1 = (I - A^1)^{-1}u$. Da $(I - A^1)$ ligesom i (6.4.3) ses at have en invers med positive elementer, må p^0 være mindre end eller lig p^1 i alle koordinater.



Figur 6.7

På tilsvarende måde får vi af udtrykkene

$$(I - A^0)p^1 = a_l^0 + v \text{ og } (I - A^0)p^0 = a_l^0,$$

hvor v er en søjlevektor med ikke-positive koordinater, at p^1 må være $\leq p^0$ i alle koordinater. Alt i alt må der derfor gælde $p^0 = p^1$.

En antydning af, hvad der ligger bag dette resultat, kan vi få ved at udstyre Robinson Crusoe (jfr. 5.4.3) med en konstant-skalaafkast teknologi som vist i Figur 6.7; produktionssiden er her eneafgørende for, hvad ligevægtsprisen bliver, forbrugssiden bestemmer kun, hvor meget, der skal produceres.

Det ses, at ligevægtsprisen er bestemt af producentsiden. Forbrugerne (her: forbrugeren) har kun betydning for, hvor på strålen tilstanden kommer til at ligge.

6.5.* Fastprisligevægte med rationering

6.5.1. Vi har i dette (og en del af det foregående) kapitel behandlet institutionen, et marked givet ved et prissystem, og undersøgt de ligevægte, der kan optræde ved denne institution.

Når vi interesserer os for sådanne (Walras- og markeds-)ligevægte, ligger heri en implicit antagelse om, at priserne kan tilpasse sig rimeligt hurtigt til ligevægtssituationen, således at man bortset fra forbigående forstyrrelser altid vil være i ligevægt.

Et konkret forsøg på at formulere denne tilpasning faldt lidt uheldigt ud. Og helt generelt bør vi også skele til, at der i virkelighedens verden er priser, der tilpasser sig meget langsomt eller slet ikke.

Vi vil derfor i dette afsnit studere den situation, hvor priserne er faste og derfor specielt ikke kan tilpasses, således at udbud bliver lig efterspørgsel. Når der således f.eks. udbydes mere af en vare, end der ønskes, er der nogle sælgere, der ikke kan få deres ønsker om salg opfyldt – og tilsvarende vil der, hvis efterspørgslen overstiger udbuddet, være købere som ikke kan købe, hvad de vil. Disse agenter siges at være *rationerede.*

Bemærk, at den vare, som rationeres i salget, kan være arbejdskraft (af forskellig art). Vi får således en mulighed for at studere fænomenet arbejdsløshed i en mikromodel. Den teori, vi her behandler, går derfor under navnet "mikrogrundlaget for makroteorien".

6.5.2. Vor fremgangsmåde vil her (i lighed med vor diskussion af Walras-ligevægtene) være den, at vi vil indføre de generelle principper og definitioner for en økonomi uden producenter og nøjes med et eksempel til at illustrere situationen i økonomier med produktion.

Vi betragter således økonomien $\mathcal{E}_P^F = ((X_i, S_i)_{i=1}^m, (\omega_i)_{i=1}^m)$. Til forskel fra tidligere vil vi antage, at der er $l+1$ varer i økonomien. Den sidste vare (nr. $l+1$) vil vi kalde *penge.* Man bør imidlertid ikke lade sig distrahere af det navn, vi giver varen. Det afgørende er, at vi antager, at de eneste handeler, der kan finde sted på markedet (som er givet ved den faste pris $p = (p_1, \ldots, p_l, 1)$, hvor vare $l+1$ har prisen 1), er af typen *vare mod penge.* Hvis man således har 20 alen lærred og ønsker en frakke (for at bruge et prominent eksempel), må man sælge lærredet for penge og dernæst købe frakken.

6.5.3. Ved den givne pris vil det kun ved et rent lykketræf kunne forventes, at efterspørgsel $=$ udbud for alle varer. Vi må derfor indføre et eller andet, der kan få bragt efterspørgslen ned, hvis den er større end udbuddet, og tilsvarende reducere udbuddet, hvis det overstiger efterspørgslen.

Ved en *mængderestriktion* for forbruger i vil vi forstå et par $(\underline{z}_i, \bar{z}_i)$ af vektorer med l koordinater med $\underline{z}_{ih} \leq 0 \leq \bar{z}_{ih}$, $h = 1, \ldots, l$. Ved denne mængderestriktion angives en nedre og en øvre grænse for den nettohandel, forbruger i kan foretage i vare h, $h = 1, \ldots, l$.

Givet mængderestriktionen $(\underline{z}_i, \bar{z}_i)$ (og den faste pris p), vil forbruger i's problem være at finde det varebundt, som maksimerer nytten blandt alle bundter $x_i \in X_i$, for hvilke nettohandelen $z_i = x_i - \omega_i$ opfylder $p \cdot z_i = 0$ og $\underline{z}_{ih} \leq z_{ih} \leq \bar{z}_{ih}$, $h = 1, \ldots, l$. Løsningen til dette problem kaldes forbruger i's *effektive efterspørgsel.*

6.5.4. Vi kan nu formulere et ligevægtsbegreb relativt til de institutioner, vi har indført. En sådan *ligevægt med mængderestriktioner* kaldes også en Drèze-ligevægt efter ophavsmanden.

En tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *og et system af mængderestriktioner* $(\underline{z}_i, \bar{z}_i)_{i=1}^m$ *kaldes en ligevægt med mængderestriktioner (ved den faste pris* p*), hvis*

(1) tilstanden er opnåelig,

(2) for alle i *er* x_i^0 *maksimum for* S_i *på mængden*

$$\{x_i \in X_i \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega_i,\ \underline{z}_{ih} \leq x_{ih} - \omega_{ih} \leq \bar{z}_{ih},\ h = 1, \ldots, l\},$$

(3) For hver vare $h = 1, \ldots, l$ *gælder*

(a) hvis der er en forbruger j*, så* $x_{jh}^0 - \omega_{jh} = \bar{z}_{jh}$*, da er* $x_{ih}^0 - \omega_{ih} > \underline{z}_{ih}$*, alle* i*,*

(b) hvis der er en forbruger k*, så* $x_{kh}^0 - \omega_{kh} = \underline{z}_{kh}$*, da er* $x_{ih}^0 - \omega_{ih} < \bar{z}_{ih}$*, alle* i*.*

Kun den sidste betingelse (3) i definitionen kræver nærmere kommentar: Den siger, at hvis der på markedet h er blot én køber (sælger), som er effektivt begrænset af sin mængderestriktion, da vil der ikke samtidig være sælgere (købere) som er begrænsede. Dette er et stabilitetskrav til systemet af mængderestriktioner – hvis både sælgere og købere samtidig var forhindrede i at gennemføre deres ønskede handler, måtte man forvente, at de fandt sammen uden om institutionerne (marked $+$ restriktioner).

6.5.5. I resten af dette afsnit vil vi betragte et simpelt eksempel, hvor vi kan gå i detaljer med undersøgelsen af forskellige former for restriktioner.

Der er 3 varer, som vi vil kalde henholdsvis "vare", "arbejdskraft" og "penge". Der er 2 agenter, nemlig én forbruger og én producent (der kunne godt have været flere forbrugere og producenter, men det ville gøre analysen lidt mere kompliceret).

Vi antager, at forbrugeren enten kan bruge sin egen arbejdskraft (forbrug af "leisure", fritid) eller sælge den til virksomheden. Det er praktisk her at formulere dette ved at antage, at han har en initialbeholdning $\omega_2 > 0$ af arbejdskraft. Ved salg af y_2 enheder af denne initialbeholdning til virksomheden bliver hans forbrug således $x_2 = \omega_2 - y_2$. Endvidere antages det, at forbrugeren har en initialbeholdning $\omega_3 > 0$ af penge, mens hans initialbeholdning af vare 1 er nul, $\omega_1 = 0$.

Forbrugerens nyttefunktion er

$$S(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \alpha_3 \log x_3,$$

hvor $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, og $\log$ betegner den naturlige logaritme. Bemærk at S opfylder F2, F3 og F4.

Ved prissystemet $(p, w, 1)$ er forbrugerens efterspørgsel (uden eventuelle mængderestriktioner) defineret som løsning til problemet

$$\begin{aligned}&\text{Max } S(x_1, x_2, x_3)\\ &\text{under bibetingelsen}\\ &px_1 + wx_2 + x_3 \leq w\omega_2 + \omega_3 + \Pi,\end{aligned}$$

hvor Π er den profit, som forbrugeren modtager fra virksomheden.

Ved opstilling af Lagrange-funktion og differentiering fås udtrykkene

$$x_1 = \alpha_1 \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w\omega_2}{p} \right),$$

$$x_2 = \alpha_2 \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w\omega_2}{w} \right)$$

for efterspørgslen efter varer og arbejdskraft (i form af fritid).

6.5.6. Antag nu, at forbrugeren i sit salg af arbejdskraft er begrænset af en mængderestriktion – det vil sige, at forbrugeren er rationeret i salget af arbejdskraft. Det betyder, at han kun kan sælge den mængde y_2 af arbejdskraft, som køberen (virksomheden) efterspørger. Hans problem bliver da

$$\begin{aligned}&\text{Max } S(x_1, x_2, x_3)\\ &\text{under bibetingelserne}\\ &x_2 = \omega_2 - y_2,\ px_1 + x_3 \leq \omega_3 + \Pi + wy_2\end{aligned}$$

med løsning

$$\hat{x}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3} \left(\frac{\omega_3 + \Pi + wy_2}{p} \right)$$

for (effektiv) efterspørgsel efter varen.

Tilsvarende kan vi antage, at forbrugeren er rationeret i sit varekøb, således at han kun kan købe den udbudte mængde y_1. Vi får da, at hans problem er

$$\begin{aligned}&\text{Max } S(x_1, x_2, x_3)\\ &\text{under bibetingelserne}\\ &x_1 = y_1,\ wx_2 + x_3 \leq \omega_3 + \Pi + w\omega_2 - py_1\end{aligned}$$

med løsning
$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w\omega_2 - py_1}{w} \right)$$
for (effektiv) efterspørgsel efter arbejdskraft (til eget brug).

6.5.7. Virksomheden antages givet ved produktionsfunktionen
$$y_1 = 2\sqrt{y_2},$$
hvor vi (af praktiske hensyn) har brudt med vor fortegnskonvention og regner input af arbejdskraft positivt.

Hvis virksomheden ikke er rationeret, er dens problem
$$\begin{aligned}&\text{Max}\, py_1 - wy_2\\ &\text{under bibetingelsen}\\ &y_1 - 2\sqrt{y_2} = 0\end{aligned}$$
med løsning
$$y_1 = 2\frac{p}{w},\ y_2 = \left(\frac{p}{w}\right)^2.$$

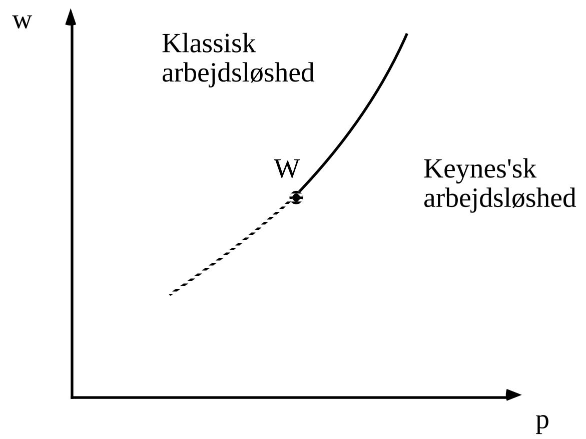
Er virksomheden rationeret i sit salg, således at den højst kan sælge den efterspurgte mængde x_1, antages den at tilpasse sit input hertil, således at (effektiv) efterspørgsel efter arbejdskraft bliver
$$\hat{y}_2 = \frac{1}{4}x_1^2.$$

Hvis tilsvarende virksomheden er rationeret i købet af arbejdskraft, således at den kun kan købe x_2, fås
$$\hat{y}_1 = 2\sqrt{x_2}.$$

Med vor antagelse om virksomhedens adfærd vil den ikke kunne være rationeret i både køb og salg, idet den vil tilpasse sin produktion til den mest restriktive af sine mængderestriktioner.

6.5.8. Vi kan nu undersøge de mulige kombinationer af restriktioner for sælgere og købere på de to markeder, de såkaldte “regimer”. Der er følgende tilfælde:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Rationeret på varemarkedet</td></tr>
<tr><td>sælger</td><td>køber</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rationeret på arbejdsmarkedet</td><td>sælger</td><td>Keynes’sk arbejdsløshed</td><td>Klassisk arbejdsløshed</td></tr>
<tr><td>køber</td><td></td><td>Undertrykt inflation</td></tr>
</table>



Figur 6.8

Nederste venstre hjørne i skemaet kommer ikke på tale som følge af vores antagelse om, at virksomheden ikke samtidigt er rationeret i køb og salg. Betegnelserne for de enkelte regimer er hentet fra makroteorien. Bemærk, at situationen med over-efterspørgsel efter arbejdskraft og efter varen kaldes undertrykt inflation, idet priserne jo i hele vores behandling er faste.

Om økonomien befinder sig i det ene eller det andet regime, afhænger af værdierne af de faste priser p og w. Dette vil vi nu undersøge lidt nærmere, idet vi vil finde de (p, w)-kombinationer, hvor man går fra ét regime til et andet.

6.5.9. Først bemærker vi, at der i den betragtede økonomi findes en Walras-ligevægt (dette følger af sætning 6.2.3: Forudsætningen $\omega \in \operatorname{int} \mathbb{R}^3_+$ er ikke nødvendig i vort tilfælde). Der er endda kun én Walras-ligevægt (det er let at indse – prøv selv!).

Keynes'sk ctr. klassisk arbejdsløshed: Her er forbrugeren rationeret på arbejdsmarkedet. Grænsen mellem de to regimer er givet ved, at forbrugerens effektive vareefterspørgsel er lig producentens udbud, dvs. $\hat{x}_1 = y_1$ eller

$$y_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3} \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w y_2}{p} \right)$$

eller, da virksomhedens profit $\Pi = p y_1 - w y_2$,

$$y_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3} \left(\frac{\omega_3}{p} + y_1 \right),$$

hvoraf

$$y_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \frac{\omega_3}{p}.$$

For $y_1 = 2p/w$ fås

$$p^2 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \frac{\omega_3}{2} \right) w,$$

som giver en kurve som vist i Figur 6.8 (hvor punktet W angiver Walras-ligevægten). Det ses let, at den Keynes'ske arbejdsløshed indtræffer neden for, den klassiske oven for kurven.

Klassisk arbejdsløshed ctr. undertrykt inflation: Her er forbrugeren rationeret på varemarkedet. Grænsen mellem de to regimer er sådanne (p, w), for hvilke der er ligevægt på arbejdsmarkedet.

Givet rationeringen på varemarkedet er forbrugerens effektive efterspørgsel efter arbejdskraft

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w\omega_2 - py_1}{w} \right).$$

Ved indsætning af $\Pi = py_1 - wy_2 = py_1 - w(\omega_2 - \hat{x}_2)$ fås

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \left(\frac{\omega_3}{w} + \hat{x}_2 \right)$$

eller

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{\omega_3}{w}.$$

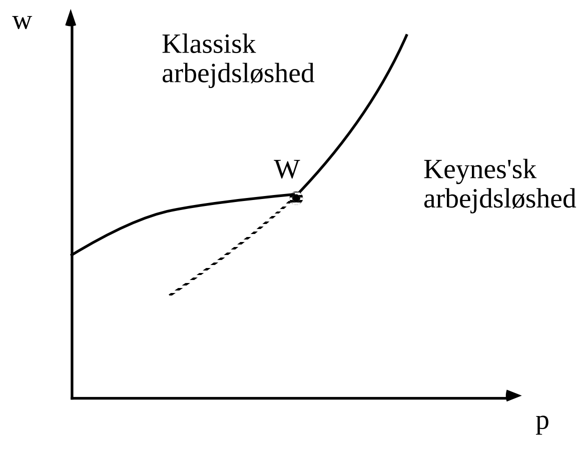
Udbud $=$ efterspørgsel giver da

$$\omega_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{\omega_3}{w} = \left(\frac{p}{w} \right)^2$$

eller

$$p^2 = \omega_2 w^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \omega_3 w$$

som er indtegnet (sammen med den tidligere kurve) i Figur 6.9:



Figur 6.9

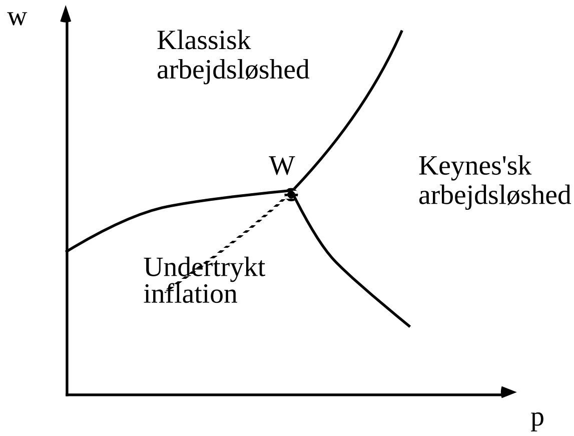
Endelig kan vi finde *grænsen mellem undertrykt inflation og Keynes'sk arbejdsløshed:* Her er kun virksomheden rationeret, så forbrugerens efterspørgsel er

$$x_1 = \alpha_1 \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w\omega_2}{p} \right), \; x_2 = \alpha_2 \left(\frac{\omega_3 + \Pi + w\omega_2}{w} \right).$$

Sammenhængen mellem p og w bliver i denne situation

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\frac{\omega_3}{p} = 2\sqrt{\omega_2 - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\frac{\omega_3}{w}}.$$

Denne kurve er indtegnet i Figur 6.10 sammen med de tidligere 2 kurver.



Figur 6.10

6.5.10. Vi har hermed fået kortlagt de situationer, der kan opstå i vor simple økonomi. Herfra kan man gå videre og betragte dels tilpasningsprocesser – spørgsmålet om hvorledes (p, w) kan tænkes at bevæge sig afhængigt af hvilket regime, man befinder sig i – dels komparativ statik, hvor man ændrer på f.eks. pengemængden ω_3. Herved ændres figuren, og man kan da undersøge virkningen af et sådant indgreb afhængigt af, i hvilket regime man befandt sig initialt.

6.6. Noter

6.6.1. Walras-ligevægten blev introduceret af Walras (1874, 1877). At eksistensen af Walras-ligevægte kræver et bevis, blev klart i 1930'erne. Beviset givet i afsnit 6.2 er en simplificeret udgave af de eksistensbeviser, der fremkom i 1950'erne (Arrow og Debreu (1954), Gale (1955), McKenzie (1959), Nikaido (1956)).

En ny udvikling startede i 1970'erne, hvor Gale og MasColell (1975) og Shafer og Sonnenschein (1974) viste eksistens uden antagelser om totale og transitive præferencerelationer.

6.6.2. Resultatet refereret i 6.3.2 findes i Debreu (1970). En intuitiv begrundelse for, at tâtonnement-processen virker dårligt, er, at der ved pristilpasningen ikke tages højde for substitutionseffekter. En proces, der tager disse effekter med, og som har "pæne" egenskaber, er behandlet af Smale (1976).

6.6.3. Den lineære produktionsmodel er – som nævnt i noterne til kapitel 4 – grundigt behandlet i litteraturen, se f.eks. Gale (1960). For anvendelse af modellen inden for marxistisk økonomi kan henvises til Morishima (1973).

6.6.4. Teorien skitseret i afsnit 6.5 betegnes ofte som “mikrogrundlaget for makroteorien”. En lettilgængelig introduktion til emnet er Malinvaud (1977). Ligevægte med mængderestriktioner blev introduceret af Drèze (1975).

6.7. Opgaver

6.7.1. Betragt en forbrugsøkonomi

$$\mathcal{E}_P^F = ((X_1, S_1), (X_2, S_2), \omega_1, \omega_2),$$

hvor

$$X_1 = X_2 = \mathbb{R}^2_+,$$
$$S_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},\ \omega_1 = (1, 1),$$
$$S_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}},\ \omega_2 = (2, 2),$$

Find en Walras-ligevægt for økonomien.

6.7.2. Lad

$$\mathcal{E}_P = ((\mathbb{R}^3_+, S_i)_{i=1}^2, (Y_j)_{j=1}^2, (\omega_i)_{i=1}^2, (\theta_{ij})_{i=1}^2{}_{j=1}^2)$$

være en økonomi med privat ejendomsret, hvor $S_i : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$S_i(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{2}},$$

og $\omega_i = (0, 0, 16)$ for $i = 1, 2$.

Virksomhed 1 ejes af forbruger 1, og virksomhedens produktionsmuligheder er givet ved

$$Y_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2 = 0,\ y_1 \leq \sqrt{(-y_3)},\ y_3 \leq 0\}.$$

Virksomhed 2 ejes af forbruger 2, og dens produktionsmuligheder er givet ved

$$Y_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0,\ y_2 \leq 4\sqrt{(-y_3)},\ y_3 \leq 0\}.$$

(a) Lad $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3_+$, $p_h > 0$ for $h = 1, 2, 3$. Find for hver af producenterne løsningen til producentens problem ved dette prissystem (jfr. opgave 4.8.1).

(b) Find for hver af forbrugerne løsningen til forbrugerens problem ved dette prissystem og den afledede indkomst givet ved værdien af forbrugerens initialbeholdning og hans eventuelle profit.

(c) Find en Walras-ligevægt for økonomien $\mathcal{E}_P$.

6.7.3. Betragt en økonomi med to varer, vare 1 og vare 2, og to (typer af) forbrugere, forbruger 1 og forbruger 2. Forbruger 1 har præferencer for de to varer, som kan beskrives ved nyttefunktionen

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}x_{12}^2,$$

hvor x_{11} er forbruger 1's forbrug af vare 1 og x_{12} hans forbrug af vare 2. Forbruger 1's initialbeholdning af varerne er givet ved $\omega_1 = (3, 9)$. Forbruger 2 har præferencer for de to varer, som kan beskrives ved nyttefunktionen

$$S_2(x_{21}, x_{22}) = 2x_{21}x_{22},$$

hvor x_{21} er forbruger 2's forbrug af vare 1 og x_{22} hans forbrug af vare 2. Forbruger 2 har en initialbeholdning af varerne på $\omega_2 = (2, 12)$

(a) Tegn for begge forbrugere i et (x_1, x_2)-diagram indifferenskurven for nytten 16. Angiv forbrugernes indkomster som funktion af varepriserne. Opstil for hver forbruger hans nyttemaksimeringsproblem (FP) og bestem forbrugernes nyttemaksimerende forbrug (efterspørgsel) som funktion af varepriserne.

(b) Opstil betingelser for en ligevægt på de to varemarkeder og vis, at prisen $(p_1, p_2) = (1, \frac{1}{3})$ er en ligevægtspris. Bestem Walras-ligevægtstilstanden ved denne pris. Er Walras-ligevægten fair?

(c) Skitsér en Edgeworth-boks for økonomien og angiv heri økonomiens initialtilstand givet ved forbrugernes initialbeholdninger samt Walras-ligevægten. Sammenlign de to tilstande.

7. Eksternaliteter og offentlige goder

7.1. Eksterne effekter

7.1.1. Et af formålene med vores undersøgelse af forskellige økonomier i de foregående kapitler var at belyse agenternes indbyrdes afhængighed i et økonomisk system – således er f.eks. den enkelte forbrugers varebundt afhængigt af dels de andre forbrugeres tildeling, dels af hvad der er til rådighed. Vi har imidlertid indtil nu holdt denne indbyrdes afhængighed nede på et minimum. Således er der visse former for afhængighed mellem agenterne, som vi konsekvent har holdt uden for vores analyse. Dem vil vi tage fat på nu.

7.1.2. Én hovedtype af afhængighed mellem agenterne i en økonomi går under fællesbetegnelsen *eksterne effekter.* Hvad det drejer sig om, ses lettest af nogle eksempler (af den traditionelle stiliserede lærebogstype): Standardeksemplet på (positive) eksterne effekter i produktionen handler om en frugtavler, hvis nabo holder bier. Bierne flyver ind over hegnet og bestøver frugttræerne, hvilket skulle have en gavnlig effekt på frugtavlerens output. Denne serviceydelse fra biavlerens (eller snarere biernes) side er imidlertid ikke et input, som der kan opkræves en betaling for – det er en ekstern effekt.

En række eksempler går på *infrastrukturens* betydning. Her er et klassisk eksempel (som tiden dog i mellemtiden er løbet fra): En nyanlagt maskinfabrik tiltrækker faglært, højt kvalificeret (det vil ifølge lærebogstraditionen sige mandlig) arbejdskraft til egnen. Den nærliggende tekstilfabrikant har så fornøjelse af at se deres medbragte hustruer slutte sig til den lokale industrielle reservearmé. Med økonomernes traditionelle stillingtagen i klassekampen går også denne situation under betegnelsen en positiv ekstern effekt.

Eksemplerne på negative eksterne effekter er knap så verdensfjerne. Typisk har de noget at gøre med *forurening:* Når de jyske industrivirksomheder leder deres urensede spildevand ud i åløbene og derved dræber ørredbestandene i de nærliggende dambrug, er der tale om en negativ ekstern effekt (i produktionen).

7.l.3. Fælles for disse eksempler er, at for den enkelte producent vil mængden af teknisk mulige produktionsplaner være afhængig af, hvilken produktion der faktisk gennemføres af de andre producenter. Vi kan derfor ikke nøjes med at specificere et produktionsmulighedsområde $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ for den enkelte producent. Hvorledes man generelt kan formalisere eksterne effekter i produktionen, vil vi ikke gå ind på, men nøjes med at undersøge konsekvenserne af eksterne effekter i et simpelt eksempel:

Antag, at der i økonomien er 3 varer, hvoraf de to første produceres og den tredje er input (vi vil kalde vare nr. 3 for arbejdskraft). Der er én forbruger med forbrugsmulighedsområde $\mathbb{R}^3_+$ og nyttefunktion S. Forbrugerens initialbeholdning (som, da der kun er én forbruger, også er økonomiens initialbeholdning) er $\omega = (0, 0, \omega_3)$. Endvidere har vi to producenter, som producerer henholdsvis vare 1 og vare 2 med vare 3 som input. Virksomhederne har produktionsfunktioner

$$\begin{aligned} y_{11} &= g_1(y_{13}; y_{22}) \\ y_{22} &= g_2(y_{23}), \end{aligned}$$

hvor y_{jh} er virksomhed j's nettooutput af vare h, $j = 1, 2$, $h = 1, 2$. Input af arbejdskraft, y_{13} og y_{23}, vil blive regnet positivt. Der er kommet en ekstern effekt ind gennem det forhold, at output i virksomhed 1 for givet input afhænger af virksomhed 2's output (man kan tænke sig, at virksomhed 2's forurening er proportional med dens output).

7.1.4. Definitionen af Pareto-optimalitet i denne økonomi er ikke ændret: En tilstand er Pareto-optimal, hvis den er opnåelig, og hvis ingen opnåelig tilstand stiller forbrugeren bedre. Men deraf følger (som sædvanligt), at den må maksimere forbrugerens nyttefunktion S under de bibetingelser, der sikrer, at en tilstand er opnåelig, dvs. den løser problemet:

$$\begin{aligned} &\text{Max}\, S(x_1, x_2, x_3) \\ &\text{under bibetingelserne:} \\ &x_1 = y_{11} = g_1(y_{13}; y_{22}), \\ &x_2 = y_{22} = g_2(y_{23}), \\ &x_3 = \omega_3 - (y_{13} + y_{23}). \end{aligned}$$

Ved at sætte de partielle afledede af Lagrange-funktionen

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, y_{13}, y_{23}, &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &= S(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1(x_1 - g_1(y_{13}; x_2)) \\ &\quad + \lambda_2(x_2 - g_2(y_{23})) + \lambda_3(x_3 + y_{13} + y_{23} - \omega_3) \end{aligned}$$

lig nul får vi et ligningssystem

$$\begin{aligned} S'_1 + \lambda_1 &= 0 \\ S'_2 - \lambda_1 g'_{12} + \lambda_2 &= 0 \\ S'_3 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 g'_{13} + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 g'_{23} + \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

som vil være opfyldt i den Pareto-optimale tilstand.

Ved at eliminere λ'erne får vi

$$(*)\qquad \begin{aligned} \frac{S_1'}{S_3'} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{1}{g_{13}'} \\ \frac{S_2'}{S_3'} &= \frac{\lambda_1 g_{12}' - \lambda_2}{-\lambda_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} g_{12}' = \frac{1}{g_{23}'} - \frac{g_{12}'}{g_{13}'} \end{aligned}$$

7.1.5. Vi kan af systemet (*) umiddelbart se, at *en Pareto-optimal tilstand ikke længere* (nødvendigvis) *kan fås som markedsligevægt.* Hvis vi nemlig skulle finde priser $p = (p_1, p_2, p_3)$ og en indkomst til forbrugeren, der gjorde tilstanden til en markedsligevægt, måtte der for disse priser nødvendigvis gælde

$$\frac{S_1'}{S_3'} = \frac{p_1}{p_3}, \; \frac{S_2'}{S_3'} = \frac{p_2}{p_3}.$$

Af (*) fås da

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{g_{23}'} - \frac{g_{12}'}{g_{13}'}$$

eller

$$(1)\qquad p_2 g_{23}' = p_3 \left(1 - g_{12}' \frac{g_{23}'}{g_{13}'} \right).$$

Hvis virksomhed 2 sættes til at maksimere profit ved priserne $p = (p_1, p_2, p_3)$, dvs. maksimere $p_2 g_2(y_{23}) - p_3 y_{23}$, fås imidlertid marginalbetingelsen

$$p_2 g_{23}' = p_3,$$

som er forskellig fra (1), når $g_{12}' \neq 0$, dvs. når der foreligger en ekstern effekt.

7.1.6. Omvendt kan vi også se, at tilstanden hørende til en markedsligevægt ikke er Pareto-optimal. Lad nemlig priserne være $p = (p_1, p_2, p_3)$, da må der, når forbrugeren maksimerer nytte og virksomhederne profit, gælde, at

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{S_1'}{S_3'} = \frac{1}{g_{13}'}, \; \frac{p_2}{p_3} = \frac{S_2'}{S_3'} = \frac{1}{g_{23}'}.$$

Vi prøver nu at flytte en (lille) enhed arbejdskraft dy_3 fra virksomhed 1 til virksomhed 2 (således at forbruget x_3 er uændret). Herved fås en tilvækst i produktionen af vare 2 af størrelsen

$$dx_2 = g_{23}' \, dy_3$$

og i produktionen af vare 1 af størrelsen

$$dx_1 = -g_{13}' \, dy_3 + g_{12}' \, dx_2 = (-g_{13}' + g_{12}' g_{23}') \, dy_3,$$

hvor andet led er den ændring i produktionen, som opstår gennem den eksterne effekt. Resultatet af dette for forbrugeren er

$$dS = S_1'\,dx_1 + S_2'\,dx_2 = [S_1'(g_{12}'g_{23}' - g_{13}') + S_2'g_{23}']\;dy_3.$$

Indsættes nu $S_1'g_{13}' = S_2'g_{23}' = S_3'$, fås

$$dS = S_1'g_{12}'g_{23}'\,dy_3.$$

Her er S_1' (grænsenytten af vare 1) og g_{23}' (arbejdskraftens grænseprodukt i virksomhed 2) positive under vore sædvanlige forudsætninger, således at dS er positiv (negativ), hvis den eksterne effekt g_{12}' er positiv (negativ). Vi konkluderer, at vi, såfremt der foreligger positive (negative) eksterne effekter, kan forbedre tilstanden ved at flytte arbejdskraft fra virksomhed 1 til virksomhed 2 (fra 2 til 1). Tilstanden er derfor ikke Pareto-optimal.

7.1.7. Vi har således set, at når eksterne effekter introduceres, vil begge Hovedsætningerne fra kap. 5 (som vi dog var så glade for) bryde sammen. Dette ser temmelig slemt ud for vores teori – så meget mere som vi må antage, at eksterne effekter i den ene eller anden form er noget typisk for moderne økonomier.

Konsekvensen bliver imidlertid ikke (som man måske havde håbet), at hele den teori, vi har udviklet indtil nu, forkastes. En teori med mangler er langt bedre end slet ingen teori. Vi kan benytte vores indsigt fra de forrige kapitler til at undersøge, om markedsinstitutionen kan suppleres med andre institutioner og derved bringes til at fungere også med eksternaliteter.

7.1.8. Blandt de institutionelle arrangementer, man kunne overveje for at råde bod på den manglende sammenhæng mellem markedsligevægte og Pareto-optimalitet, er følgende:

(a) *Betaling for den eksterne effekt:* I vores model betyder dette, at der er indført en ny vare "ekstern effekt af virksomhed 2's produktion" med tilhørende pris p_4. Profitten i virksomhed 1 bliver da

$$p_1g_1(y_{13};y_{22}) - p_3y_{13} - p_4y_{22}$$

og i virksomhed 2

$$(p_2 + p_4)g_2(y_{23}) - p_3y_{23}.$$

Heraf fås marginalbetingelserne

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{g_{13}'},\ \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{g_{23}'} - \frac{g_{12}'}{g_{13}'},$$

som ved sammenligning med (*) i 7.1.4. ses netop at være de betingelser, som skal være opfyldt i en Pareto-optimal tilstand. Formelt er dette altså en løsning på problemet – men i praksis duer det ikke: Det er sjældent, at man kan opkræve betaling for den eksterne effekt (jf. frugtavler-biavler eksemplet).

(b) *Fælles profitmaksimering:* Dette er en radikal, men effektiv måde at klare problemerne på: hvis vi slår virksomhederne sammen, er der ikke længere eksternaliteter, idet alle problemerne er blevet interne i den ene resterende virksomhed.

Uanset at vi her har et stærkt argument for at nationalisere alt, må vi dog også bemærke, at problemerne ikke er blevet løst, fordi de i stedet for eksterne er blevet til interne effekter. Men det antyder, at den opdeling i selvstændige virksomheder, som har etableret sig ad historisk vej, ikke nødvendigvis er den mest rationelle mht. decentralisering af økonomiske beslutninger.

(c) *Afgifter/subsidier:* En knap så drastisk udvej består i at lægge en afgift t på forbruget af den vare, hvis produktion giver anledning til den eksterne effekt, det vil i vort eksempel sige vare nr. 2. Derved fås marginalbetingelserne

$$\frac{S_1'}{S_3'} = \frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{g_{13}'},\ \frac{S_2'}{S_3'} = \frac{p_2 + t}{p_3},\ \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{g_{23}'},$$

hvoraf iflg. (*) $t = -p_3 g_{12}'/g_{13}'$.

7.1.9. Foruden eksterne effekter i produktionen kan der optræde eksterne effekter i forbruget. Eksemplerne skulle være velkendte: Dels er den ene families fornøjelse af et vist forbrug afhængig af forbruget i de kredse, man sammenligner sig med (det er denne effekt, som går under betegnelsen “keeping up with the Jones’es”), dels er f.eks. glæden ved (eller snarere muligheden for) at køre i sin bil stærkt afhængig af, hvor mange andre forbrugere, der har valgt at køre bil på samme tidspunkt.

Eksterne effekter i forbruget kan formaliseres ved, at andre variable end hans eget varebundt inddrages i forbrugerens nyttefunktion. Typen af problemer, som opstår, er som ovenfor, så vi vil ikke gå ind på detaljerne.

7.2. Offentlige goder, Lindahl-ligevægte

7.2.1. En anden form for afhængighed mellem de enkelte agenter i økonomien opstår, hvis der er varer, som bruges *i fællesskab.* Det har der ikke været i vores teori indtil nu. Varer har været *private* i den forstand, at den samlede varemængde deles ud mellem forbrugerne, som så forbruger *hver deres* varemængde. Men der findes varer, for hvilke dette ikke er realistisk: Hvis én forbruger sidder på en bænk i Botanisk Have, udelukker dette ikke, at en anden forbruger *på samme tid* kan have fornøjelse af den *samme* park (oven i købet på samme bænk).

Andre typiske eksempler på offentlige goder er politibeskyttelse, forsvar, undervisning (i hvert fald opfattet som almindelig oplysning).

Offentlige goder vil i vores teori være defineret som sådanne varer, for hvilke *forbruget er det samme for hver enkelt forbruger og lig den mængde af varen, der er til rådighed.* Dette er ikke synonymt med enhver ydelse, der gives i praksis af en offentlig sektor – heller ikke med dem, der med en (uheldig) betegnelse går under navnet “gratis ydelser”. Således indeholder f.eks. sundhedssektorens ydelser såvel et privat (behandlingen af den enkelte borger) som et offentligt element (sikring af den almindelige sundhedstilstand). I praksis optræder rendyrkede offentlige goder forholdsvist sjældent, men det er teoretisk hensigtsmæssigt at behandle dem særskilt.

7.2.2. Vi vil i det følgende antage, at der i økonomien er l private (dvs. sædvanlige) varer og k offentlige goder. Forbrugsmulighedsområderne X_i er da delmængder af $\mathbb{R}^{l+k}$, og forbrugernes nyttefunktioner, som er defineret på X_i, tager højde for såvel private varer som offentlige goder.

Vi vil antage, at de offentlige goder produceres (dvs. er output, men ikke input) i en eller flere virksomheder. Generelt har virksomhederne således produktionsmulighedsområder $Y_j \subset \mathbb{R}^{l+k}$. Økonomiens initialbeholdning antages oftest at bestå alene af private varer, således at de offentlige goder skal produceres (såfremt de ønskes).

7.2.3. Definitionen af opnåelige tilstande må tilpasses den nye situation: En tilstand $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ er *opnåelig,* hvis

$$x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, m$$
$$y_j \in Y_j,\ j = 1, \ldots, n$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ih} = \sum_{j=1}^{n} y_{jh} + \omega_h,\ h = 1, \ldots, l \text{ (private varer),}$$
$$x_{ih} = \sum_{j=1}^{n} y_{jh},\ i = 1, \ldots, m,\ h = l+1, \ldots, l+k \text{ (offentlige goder).}$$

En opnåelig tilstand er (som sædvanlig) Pareto-optimal, hvis der ikke findes en anden opnåelig tilstand, der stiller alle forbrugere lige så godt og mindst én forbruger bedre.

7.2.4. Kan Pareto-optimale tilstande fås som markedsligevægte? Almindeligvis ikke: hvis der var priser på de $l + k$ varer, således at hver forbruger (med passende tildeling af indkomst) købte det bundt x_i^0, der er specificeret i den Pareto-optimale tilstand, måtte prisforholdet mellem ethvert par af varer være lig det marginale substitutionsforhold mellem varerne for enhver forbruger. Specielt måtte det marginale substitutionsforhold for et offentligt gode over for et privat være ens for alle forbrugere.

Dette kan man normalt ikke opnå: Det betyder jo, at alle har den samme afvejning af 1 kr. mere brugt på forsvar over for 1 kr. mere brugt på eget privatforbrug (ligesom også 1 kr. mere til forsvar over for 1 kr. mere til daginstitutioner vurderes ens af alle).

Når det således kun som en undtagelse vil ske, at de enkelte forbrugeres marginale substitutionsforhold for alle varer er ens ved en given forsyning

$(x^0_{l+1}, \dots, x^0_{l+k})$ med offentlige goder, kan man naturligvis ikke vælge et prissystem, således at prisforhold er lig med marginale substitutionsforhold for alle forbrugere. Tilstanden kan ikke fås som markedsligevægt.

7.2.5. Den logiske konsekvens af, at forbrugerne har forskellige marginale substitutionsforhold, vil være at vælge forskellige priser for de enkelte forbrugere.

Formelt gøres dette ved at indføre et system af personpriser $q_1, \dots, q_m$ på de offentlige goder. Hver af priserne $q_i = (q_{i,l+1}, \dots, q_{i,l+k})$ er en vektor med k koordinater, således at agent i's betaling for de offentlige goder er vektoren q_i ganget med vektoren $(x^0_{i,l+1}, \dots, x^0_{i,l+k})$, der er fælles for alle forbrugere, eller

$$\sum_{h=1}^{k} q_{i,l+h} x^0_{i,l+h}.$$

Vi kan nu definere, hvad vi vil forstå ved en markedsligevægt i denne nye situation:

En tilstand $(x^0_1, \dots, x^0_m, y^0_1, \dots, y^0_n)$, en pris $p^0 = (p^0_1, \dots, p^0_l)$ på private varer og et system af personpriser $q^0_1, \dots, q^0_m$ og indkomster $R^0_1, \dots, R^0_m$ kaldes en Lindahl-(markeds-)ligevægt, hvis

(1) tilstanden er opnåelig

(2) for alle i er x^0_i maksimal for S_i på mængden

$$\left\{ x_i \in X_i \;\middle|\; \sum_{h=1}^{l} p^0_h x_{ih} + \sum_{h=1}^{k} q^0_{i,l+h} x_{i,l+h} \leq R^0_i \right\},$$

(3) for alle j maksimerer y^0_j profitten

$$\sum_{h=1}^{l} p^0_h y_{jh} + \sum_{h=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} q^0_{i,l+h} \right) y_{j,l+h}$$

på Y_j.

Vi har altså her, at de private varer har fælles pris, men de offentlige goder personpriser. Den pris, der gælder for producenten ved hans salg af de offentlige goder, er lig summen af personpriserne. Der gælder, at en Pareto-optimal tilstand kan fås som Lindahl-ligevægt, eller præcist:

Lad $\mathcal{E} = ((X_i, S_i)^m_{i=1}, (Y_j)^n_{j=1}, \omega)$ være en økonomi med offentlige goder, hvor forbrugerne opfylder F1, F2 og F3, producenterne P1. Lad $(x^0_1, \dots, x^0_m, y^0_1, \dots, y^0_n)$ være en Pareto-optimal tilstand med $x^0_i \in$ int X_i, $i = 1, \dots, m$.

Da findes der priser $p^0 = (p_1^0, \dots, p_l^0)$ med $p_h^0 > 0$, personpris-systemer q_i^0, $i = 1, \dots, m$ og indkomster R_i^0, $i = 1, \dots, m$, således at $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0, p^0, q_1^0, \dots, q_m^0, R_1^0, \dots, R_m^0)$ er en Lindahl-(markeds-)ligevægt.

7.2.6.* I beviset for denne sætning kan vi udnytte Hovedsætning II fra kapitel 5, selvom økonomien med offentlige goder tilsyneladende er mere kompliceret. Tricket består i at definere en masse nye private varer i stedet for de offentlige goder. I stedet for $l + k$ får vi $l + mk$ varer, idet hvert offentligt gode opfattes som m private varer (i stedet for det offentlige gode "park" har vi m private varer "park til forbruger 1", "park til forbruger 2" osv.). Forbrugernes forbrugs-mulighedsområder er så delmængder af $\mathbb{R}^{l+mk}$. Et typisk varebundt består derfor af l koordinater, der refererer til "rigtige varer", fulgt af m gange k koordinater, der angiver de offentlige goder, opfattet som private varer for hvert individ.

Nyttefunktionen S_i er defineret på sådanne varebundter, men afhænger kun af de private varer og af $x_{i,l+1}, \dots, x_{i,l+k}$. Derved er F3 ikke længere opfyldt; dog vil for ethvert bundt x_i mængden $X_i^0 = \{x \in X_i \mid S_i(x) \geq S_i(x_i)\}$ være konveks, og det er nok for beviset.

Produktionsmulighedsområdet svarende til det gamle Y_j vil bestå af alle de $(l + mk)$-vektorer, som er $\leq$ (i alle koordinater) end vektorer

(1) $$(y_1, \dots, y_l, \underbrace{y_{l+1}, \dots, y_{l+k}, \dots, y_{l+1}, \dots, y_{l+k}}_{m \text{ gange}}),$$

hvor $(y_1, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_{l+k}) \in Y_j$. De nye produktionsmulighedsområder opfylder P1.

Til den Pareto-optimale tilstands bundter x_i^0 svarer "nye" bundter af formen

$$(x_1^0, \dots, x_l^0, 0, \dots, 0, \dots, x_{i,l+1}^0, \dots, x_{i,l+k}^0, 0, \dots, 0),$$

og til produktionsplanerne y_j^0 svarer "nye" produktionsplaner af typen (1). Den "nye" tilstand er Pareto-optimal, og Hovedsætning II giver os nu en pris, som her må være en $(l + mk)$-vektor

$$(p_1^0, \dots, p_l^0, q_{1,l+1}^0, \dots, q_{1,l+k}^0, \dots, q_{i,l+1}^0, \dots, q_{i,l+k}^0, \dots, q_{m,l+k}^0)$$

og indkomster $R_1^0, \dots, R_m^0$, således at tilstanden med disse priser og indkomster er en markedsligevægt.

Det er let at se, at $q_{i,l+h}^0$'erne er de ønskede personpriser, der gør tilstanden til en Lindahl-ligevægt.

(Vi har ikke vist $p_h^0 > 0$, idet Hovedsætning II kun giver $p_h^0 \geq 0$. Vi kunne dog allerede i Hovedsætning II have vist, at priserne er positive – hertil benyttes F2' – og dette vil stadig holde for de private varer).

7.2.7. Vi har hermed set, at for at få et resultat svarende til Hovedsætning II, må vi i situationen med offentlige goder, hvor alle forbrugerne skal købe det samme bundt af disse offentlige goder, indføre forskellige (person-)priser for de enkelte forbrugere.

Derved har vi i øvrigt også knyttet betalingen for de offentlige goder sammen med forbrugerens vurdering af ønskeligheden af de forskellige offentlige goder. Den, som ønsker landet spækket med atomraketter, kommer til at punge særligt kraftigt ud til forsvaret (idet han får en høj personpris på dette gode). Der er således også intuitivt tiltrækkende aspekter ved Lindahl-ligevægtene.

Desværre kan meget af dette vendes til en alvorlig svaghed: For at finde de rigtige personpriser må man kende de forskellige marginale substitutionsforhold. Her er der ikke meget andet at gøre end at spørge forbrugerne. Og så snart disse har lugtet lunten, vil de lade som om de er uinteresserede i det pågældende offentlige gode for at få en lav personpris og derved slippe billigt fra betalingen for godet, som de i virkeligheden gerne vil have (dette er det såkaldte *free-rider problem* ved offentlige goder).

7.2.8. Lindahl-ligevægtene har, som vi har set, højst teoretisk interesse – de anviser ikke en praktisk gennemførlig måde at finde frem til forsyning med og betaling for offentlige goder.

Inden vi går videre med dette problem, vil vi – ikke fordi det er nødvendigt, men af hensyn til fremstillingen simplificere situationen en hel del. Vi vil nemlig i det følgende antage:

– der er kun to varer, dvs. én privat vare og ét offentligt gode,
– der er kun én producent, som producerer det offentlige gode med den private vare som input; der er konstant skalaafkast i produktionen, så output y_2 og input y_1 opfylder

$$y_2 \leq -Ky_1$$

for et vist $K > 0$.
– alle forbrugere i har $X_i = \mathbb{R}^2_+$, opfylder F1 - F4 og har en vis initialbeholdning $\omega_i > 0$ af den private vare.

7.2.9. Blandt de mange måder at arrangere sig på ved afgørelsen om (a) produktionen af og (b) betalingen for det offentlige gode er der to yderpunkter, nemlig

(1) både (a) og (b) afgøres helt decentraliseret (af den enkelte forbruger selv), og
(2) både (a) og (b) afgøres centralt (af en offentlig myndighed).

Lad os starte med at se på mulighed (1): Hver forbruger i ofrer t_i enheder af sin beholdning af vare 1; derved bliver der i alt $\sum_{i=1}^m t_i$ enheder til input i produktionen af det offentlige gode, som altså vil foreligge i mængden $K\sum_{i=1}^m t_i$ enheder.

Efter at have afgivet de t_i enheder har forbrugeren $\omega_i - t_i$ enheder tilbage af den private vare. Hans varebundt bliver altså $(\omega_i - t_i, K\sum_{i=1}^m t_i)$. Hvis han har valgt værdien t_i sådan, at nytten af bundtet $(\omega_i - t_i, K\sum_{i=1}^m t_i)$ er størst mulig, givet de andres valg, må der gælde

$$\frac{d}{dt_i}S_i(\omega_i - t_i, K\sum_{i=1}^{m} t_i) = -S'_{i1} + KS'_{i2} = 0$$

eller

$$\frac{S'_{i1}}{S'_{i2}} = K \text{ for } i = 1, \ldots, m.$$

I sit optimum vil forbrugeren altså have K ekstra enheder af det offentlige gode for at aflevere (yderligere) én enhed af den private vare. Men heraf følger, at den tilstand, som fremkommer, når alle forbrugere vælger varebundter på denne helt individuelle facon, ikke er Pareto-optimal. Hvis nemlig alle afleverer blot $1/m$ enhed mere af den private vare, kommer der K enheder offentligt gode mere ud, og dette er en forbedring for alle forbrugerne, der jo hver især var villige til at ofre op til en hel enhed af den private vare for at få det samme.

7.2.10. Lad os dernæst se nærmere på udvej (2) (i 7.2.9 ovenfor). Først vil vi specificere, hvad det er, der skal træffes beslutning om, idet vi definerer et budget

$$B = (x_2, t_1, \ldots, t_m),$$

hvor x_2 er den mængde af offentligt gode, der skal produceres, $t_1, \ldots, t_m$ de mængder af den private vare, som inddrages fra forbrugerne (eller, hvis vi antager, at prisen på vare 1 er lig 1: de skattebeløb, der opkræves). Vi vil endvidere kræve, at $x_2 \leq K\sum_{i=1}^{m} t_i$ (ingen underskud på budgettet).

Bemærk, at når budgettet B er givet, kan hver forbruger i finde frem til sit varebundt, nemlig som $(\omega_i - t_i, x_2)$. Han kan derfor vurdere forskellige budgetter over for hinanden: Vi siger, at forbruger i er mindst lige så glad for $B^0 = (x_2^0, t_1^0, \ldots, t_m^0)$ som for $B^1 = (x_2^1, t_1^1, \ldots, t_m^1)$, skrevet $B^0 \succsim_i B^1$, hvis $S_i(\omega_i - t_i^0, x_2^0) \geq S_i(\omega_i - t_i^1, x_2^1)$. Tilsvarende har vi $B^0 \succ_i B^1$, hvis der gælder $>$ i udtrykket ovenfor.

Det falder nu helt i tråd med vore overvejelser i kapitel 5, når vi definerer budgettet B^0 som optimalt ved, at der ikke må være noget andet budget B^1, således at $B^1 \succsim_i B^0$ for alle $i = 1, \ldots, m$ og $B^1 \succ_i B^0$ for mindst ét i.

Denne procedure giver faktisk Pareto-optimale tilstande: Når B^0 opfylder kriteriet ovenfor, er den tilhørende tilstand $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, givet ved $x_i^0 = (\omega_i - t_i^0, x_2^0)$, $i = 1, \ldots, m$, Pareto-optimal. Hvis nemlig $(x_1^1, \ldots, x_m^1)$ var en opnåelig tilstand (jf. 7.2.3), så $S_i(x_{i1}^1, x_2^1) \geq S_i(x_{i1}^0, x_2^0)$, alle i (mindst ét $>$), ville $B^1 = (x_2^1, t_1^1, \ldots, t_m^1)$, hvor $t_i^1 = \omega_i - x_{i1}^1$, $i = 1, \ldots, m$, nemlig være et budget med $B^1 \succsim_i B^0$, alle i, og $B^1 \succ_i B^0$ for mindst ét i.

Helt tilfredsstillende er denne måde at klare sagen på ikke: Kriteriet for, at et budget B^0 kan blive valgt, er jo, at der ikke er enstemmighed for et alternativ. Dette kriterium vil jo i praksis næsten ikke sætte nogen grænser for, hvad der kan blive valgt, specielt kan resultatet ligge langt fra, hvad flertallet af forbrugere måtte ønske sig.

7.2.11. Vi skal nu angive en procedure, der på en måde er et kompromis mellem (1) og (2), (jf. 7.2.9), idet man kan sige, at (a) ordnes decentralt, mens (b) er institutionaliseret. Mere præcist er proceduren (den såkaldte Groves-Ledyard-mekanisme) følgende: Hver forbruger i meddeler et tal (eller et "budskab") b_i til en central myndighed. Givet budskaberne $b_1, \ldots, b_m$ sættes produktionen af det offentlige gode til

$$x_2 = K \sum_{i=1}^{m} b_i$$

og forbruger i's betaling (i private varer) til

$$t_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} b_k + [\frac{m-1}{m}(b_i - \mu_i)^2 - \sigma_i^2],$$

hvor

$$\mu_i = \frac{1}{m-1} \sum_{k \neq i} b_k$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{k \neq i} (b_k - \mu_i)^2.$$

Bemærk forskellen fra den helt decentraliserede raslebøsse-procedure: Godt nok fastsættes x_2 på samme måde, men betalingen er anderledes; den afhænger af de andres b_i'er: Jo mere forbruger i's budskab afviger fra de andres, desto større bliver hans skat. Derved reduceres incitamentet til at sætte $b_i = 0$ blot for at slippe for skatten. Vi skal se, at proceduren faktisk fører til Pareto-optimale allokeringer.

7.2.12.* Først bør vi nok sikre os, at de betalinger, proceduren specificerer, er store nok, altså at $\sum_{i=1}^{m} t_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i$, eller hvad der er det samme, at

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{m-1}{m}(b_i - \mu_i)^2 - \sigma_i^2 \right] \geq 0.$$

Det er et større regnestykke, som det kan anbefales at springe over, medmindre man er skeptisk. Her er det:

Vi har

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} (b_i - \mu_i)^2 &= \sum_i b_i^2 + \sum_i \mu_i^2 - \sum_i 2 b_i \mu_i \\
&= \sum_i b_i^2 + \frac{1}{m-1} \left[\frac{m-2}{m-1} \left(\sum_i b_i \right)^2 + \frac{1}{m-1} \sum_i b_i^2 \right] \\
&\quad - \frac{2}{m-1} \left(\sum_i b_i \right)^2 + \frac{2}{m-1} \sum_i b_i^2
\end{aligned}$$

så

$$\frac{m-1}{m}\sum_i (b_i-\mu_i)^2 = \frac{m}{m-1}\sum_i b_i^2 - \frac{1}{m-1}\left(\sum_i b_i\right)^2$$

og

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 &= \frac{1}{m-2}\left[(m-1)\sum_i b_i^2 - \frac{\sum_i(\sum_i b_i - b_i)^2}{m-1}\right] \\
&= \frac{1}{m-2}\left[(m-1)\sum_i b_i^2 - \frac{m(\sum_i b_i)^2 + \sum_i b_i^2 - 2(\sum_i b_i)(\sum_i b_i)}{m-1}\right] \\
&= \frac{m}{m-1}\sum_i b_i^2 - \frac{1}{m-1}\left(\sum_i b_i\right)^2.
\end{aligned}$$

Vi har dermed den ønskede lighed.

7.2.13. Lad nu $(x_1^0,\dots,x_m^0)$ være en tilstand, således at der for hver forbruger i, givet de andres budskaber, ikke er noget valg af budskab b_i, der stiller ham bedre (i terminologien fra (2.4.9) er $(b_1^0,\dots,b_m^0)$ en Nash-ligevægt). Betragt nu forbruger i. Hvis han ønsker at forøge det offentlige gode med en (lille) enhed, må han betale

$$q_i = \frac{\partial t_i}{\partial b_i} = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}2(b_i-\mu_i).$$

Bemærk at $\sum_{i=1}^m q_i = 1$.

Givet budskaberne b_h^0 fra de andre forbrugere $h \neq i$ har forbruger i valgt b_i^0 således at $S_i(\omega_i - t_i, K[\sum_{h\neq i} b_h^0 + b_i])$ maksimeres. Altså er

$$\frac{\partial S_i}{\partial b_i} = -S'_{i1}q_i + S'_{i2}K = 0$$

eller

$$\frac{S'_{i1}}{S'_{i2}} = \frac{K}{q_i}.$$

Forholdet K/q_i svarer altså til det marginale substitutionsforhold i punktet x_i^0, hvilket igen vil sige tangenthældningen til indifferenskurven i punktet. Hvis derfor x_i^1 er et andet bundt med $S_i(x_i^1) > S_i(x_i^0)$ må vi have

$$Kx_{i1}^1 + q_i x_2^1 > Kx_{i1}^0 + q_i x_2^0$$

(Helt præcist bruger vi sætning 3.5.2).

7.2.14. Lad $B^0 = (x_2^0, t_1^0,\dots,t_m^0)$ være det budget, der fremkommer i ligevægten $(b_1^0,\dots,b_m^0)$, og $B^1 = (x_2^1, t_1^1,\dots,t_m^1)$ et andet budget. Hvis B^1 var mindst lige så godt som B^0 for alle forbrugere i og bedre for nogle i, måtte der for alle i gælde $S_i(\omega_i - t_i^1, x_2^1) \geq S_i(\omega_i - t_i^0, x_2^0)$, hvoraf iflg. afsnit 7.2.13:

$$Kx_{i1}^1 + q_i x_2^1 \geq Kx_{i1}^0 + q_i x_2^0$$

eller

$$K(t_i^0 - t_i^1) + q_i(x_2^1 - x_2^0) \geq 0$$

med strengt ulighedstegn for visse i, hvoraf

$$K\sum_{i=1}^m (t_i^0 - t_i^1) > (x_2^0 - x_2^1)\sum_{i=1}^m q_i,$$

eller, da $\sum_{i=1}^m q_i = 1$ og $K\sum_{i=1}^m t_i^0 = x_2^0$,

$$K\sum_{i=1}^m t_i^1 < x_2^1$$

i strid med, at B^1 var et budget.

Det følger heraf, at B^0 opfylder betingelsen for optimalitet af et budget i 7.2.10, nemlig at der ikke findes et andet (muligt) budget, som er mindst lige så godt for alle forbrugere og foretrækkes af nogle. Som vi så, fører et optimalt budget til en Pareto-optimal tilstand. Vi kan altså konkludere:

> *En tilstand* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *med* $x_i^0 \in \operatorname{int} X_i$, $i = 1, \ldots, m$, *der er ligevægt for Groves-Ledyard-mekanismen, er Pareto-optimal.*

7.2.15. De ideer, der ligger bag Groves-Ledyard-mekanismen, rækker væsentligt videre end det konkrete tilfælde – også bortset fra, at vi kunne have haft $l > 1$ private varer og $k > 1$ offentlige goder. Der er nemlig her et forslag til en mekanisme, som fører til noget ønskeligt (i dette tilfælde Pareto-optimalitet), uanset at de implicerede agenter handler strategisk (i dette tilfælde ikke blot naivt sætter b_i'erne efter deres ønsker om offentlige goder, men også skeler til skattebetalingerne). Det er den samme problemstilling, som vi rørte ved i (2.3.10).

Betydningen af sådanne mekanismer turde være åbenbar, idet de giver mulighed for at decentralisere beslutningerne, samtidigt med at visse overordnede mål tilgodeses. De kunne i princippet også bruges til at lave et skattesystem, som var mere sikret mod snyd end vort nuværende. Men dette område er endnu for en stor dels vedkommende uudforsket.

7.3. Noter

7.3.1. Behandlingen af eksterne effekter er baseret på eksempler og følger Malinvaud (l972). Lindahl-ligevægten er opkaldt efter den svenske økonom Erik Lindahl, som behandlede emnet i 1919. En fremstilling af Lindahls bidrag findes i Johansen (1965).

7.3.2. Groves-Ledyard-mekanismen er hentet fra Groves og Ledyard (1977). Det skal bemærkes, at vi i fremstillingen egentlig ikke får brug for det komplicerede andet led i formlen for b_i, der til vores formål kunne have været defineret ved første led alene. At andet led er med skyldes, at der ellers kommer problemer med eksistens af ligevægt.

7.4. Opgaver

7.4.1 Lad en økonomi

$$\mathcal{E} = ((X_1, S_1), (X_2, S_2), Y, \omega)$$

med to forbrugere og en producent være givet ved

$$\begin{aligned}
&S_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}\\
&S_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}\\
&Y = \{(y_1, y_2) \mid y_2 \leq -2y_1,\ y_1 \leq 0\},\\
&\omega = (4, 0),
\end{aligned}$$

hvor vare 1 er en privat vare og vare 2 et offentligt gode. Antag, at $R_1 = \frac{1}{3} R_2$.

Find en Lindahl-ligevægt for økonomien.

7.4.2. Betragt en to-personers forbrugsøkonomi $\mathcal{E}^F$ med to private varer. Lad forbrugsmulighederne for forbruger $i = 1, 2$ være $\mathbb{R}_+^2$ og de totale begyndelsesressourcer $\omega = (4, 4)$.

Vi antager nu, at der er eksterne effekter i forbruget, idet forbruger 1's nytte af forbrugsplanen afhænger af forbruger 2's forbrug af vare 2.

Lad $S_1 : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$S_1(x_{11}, x_{12}; x_{22}) = x_{11} x_{12} - x_{22}$$

og $S_2 : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$S_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} x_{22}.$$

(A) Definér en markedsligevægt for $\mathcal{E}^F$.

(B) Find markedsligevægtene for $\mathcal{E}^F$.

(C) Find de opnåelige tilstande, hvor $x_{ih} > 0$ for $i = 1, 2$ og $h = 1, 2$, og som opfylder nødvendige førsteordensbetingelser for Pareto-optimalitet.

(D) Begrund, at en tilstand, hvor $x_{ih} > 0$, $i = 1, 2$ og $h = 1, 2$, og som hører til en markedsligevægt, ikke er Pareto-optimal.

7.4.3. Betragt en økonomi

$$\mathcal{E} = ((X_1, S_1, \omega_1), (X_2, S_2, \omega_2))$$

med to forbrugere, forbruger 1 og 2. Der er to varer i økonomien, vare 1 og 2, med priser p_1 og p_2.

Forbruger 1 er karakteriseret ved forbrugsmulighedsområdet $X_1 = \mathbb{R}^2_+$, nyttefunktionen

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^{a_1} x_{12}^{b_1},$$

hvor a_1 og b_1 er positive konstanter, og initialbeholdningen $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$ af de to varer. Forbruger 2 er karakteriseret ved forbrugsmulighedsområdet $X_2 = \mathbb{R}^3_+$, nyttefunktionen

$$S_2(x_{21}, x_{22}; x_{11}) = x_{21}^{a_2} x_{22}^{b_2} - x_{11},$$

hvor a_2 og b_2 er positive konstanter, og initialbeholdningen $\omega_2 = (\omega_{21}, \omega_{22})$ af de to varer.

Forbruger 2's nyttefunktion afslører en negativ ekstern effekt, idet forbruger 2's nytte af hans forbrug af vare 1 og 2, (x_{21}, x_{22}), afhænger negativt af forbruger 1's forbrug af vare 1, x_{11}: Jo flere øl (vare 1) forbruger 1 drikker, des mere larmer han og generer dermed sin underbo, forbruger 2. Forbruger 2 har ingen direkte indflydelse på forbruger 1's forbrugsvalg.

(a) Opstil og løs nyttemaksimeringsproblemet for forbruger 1 og forbruger 2.

(b) Hvorledes påvirkes forbruger 1's forbrug af vare 1 ved en prisstigning på vare 1 hhv. en prisstigning på vare 2? Kommentér?

(c) Opstil ligevægtsbetingelser for de to markeder i økonomien og angiv et generelt udtryk for ligevægtsprisen ved normaliseringen $p_1 = 1$.

Antag, at $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$, $\omega_1 = (6, 2)$ og $\omega_2 = (2, 6)$, og bestem ligevægtsprisen og ligevægtstilstanden i økonomien.

(d) Antag stadig, at $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$, $\omega_1 = (6, 2)$ og $\omega_2 = (2, 6)$. Vis, at ligevægtstilstanden, som er fundet i spørgsmål (c), ikke er Pareto-optimal (Vink: Find en anden tilstand, som giver begge forbrugere en højere nytte!). Forklar kort, hvorfor ligevægtstilstanden ikke er Pareto-optimal, og hvorledes dette forhold eventuelt kunne afhjælpes.

8. Tid

8.1. Daterede varer

8.1.1. Den teori, vi har beskæftiget os med i det foregående, har med en enkelt undtagelse – nemlig stabilitetsdiskussionen i afsnit 6.3 – været statisk i den forstand, at vi ikke har beskæftiget os med *forløbet* af de betragtede fænomener over tiden. Det betyder imidlertid ikke, at vi ikke kan behandle det aspekt af den økonomiske virkelighed, der går på, at varerne produceres, handles og forbruges på forskellige tidspunkter. Som vi så i 1.3.8, har vi faktisk haft dette med hele tiden – nemlig gennem vores indfortolkning af tiden i varebegrebet.

Lad os kort genopfriske denne fortolkning: Det antages, at der er K "egentlige" varer (goder og tjenester differentieret efter kvalitet og den lokalitet, hvor de leveres), som kan leveres på T forskellige tidspunkter. Vort sædvanlige l (antallet af varer) fremkommer da som $l = KT$, idet vi opfatter samme vare leveret på forskellige tidspunkter som forskellige varer.

8.1.2. Når vi nu koncentrerer os specielt om tidsaspektet, er det praktisk at skrive varebundterne $x = (x_1, \ldots, x_l)$ som

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{K1}, \ldots, x_{qt}, \ldots, x_{1T}, \ldots, x_{KT}),$$

hvor vi har indført dobbeltindeks, således at x_{qt} står for det kvantum af varen af type q leveret på tidspunkt t, der indgår i det pågældende varebundt.

Hvis der er givet et marked bestemt ved prissystemet p, kan dette prissystem tilsvarende skrives som

$$p = (p_{11}, \ldots, p_{K1}, \ldots, p_{qt}, \ldots, p_{1T}, \ldots, p_{KT}),$$

hvor p_{qt} er prisen på varen af type q købt til levering på tidspunkt t.

8.1.3. Lad nu t^1 og t^2 være to af de T tidspunkter med $t^1 < t^2$. For hver varetype $q = 1, \ldots, K$ kan vi betragte forholdet

$$\alpha_q(t^1, t^2) = \frac{p_{qt^1}}{p_{qt^2}},$$

som kaldes akkumulationsfaktoren for vare q fra tidspunkt t^1 til t^2. For at fortolke $\alpha_q(t^1, t^2)$ kan vi antage, at en forbruger har en enhed af vare q på tidspunkt t^1. I stedet for at forbruge den umiddelbart kan han udskyde sit forbrug til tidspunkt t^2

ved at sælge én enhed "q på tidspunkt t^1" og købe x enheder "q på tidspunkt t^2". Vi har da, at

$$p_{qt^2}x = p_{qt^1}1,$$

så $x = \alpha_q(t^1, t^2)$, der således viser, hvad den ene enhed vare er "vokset" til fra t^1 til t^2. Hvis specielt $t^2 = t^1 + 1$, således at t^2 er det tidspunkt, der følger umiddelbart efter t^1, kan vi definere *rentesatsen med hensyn til vare q fra t^1 til* $t^1 + 1$ som

$$i_q(t^1, t^1 + 1) = \alpha_q(t^1, t^1 + 1) - 1.$$

8.1.4. Vi ser heraf, at der implicit gennem prissystemet også er bestemt et system af renter, priser på at holde en bestemt vare fra en periode til den næste. Vor teori fra de foregående kapitler er derfor også en teori om, hvorledes renten (eller snarere: renterne) bestemmes.

Læg mærke til, at rentesatsen normalt vil være forskellig i forskellige tidspunkter og (nok så vigtigt) for forskellige varer. Der er ikke (eller i hvert fald kun som en undtagelse) en fælles rentesats, som man kan kalde rent*en*. Men det er der i øvrigt heller ikke i virkeligheden – de forskellige typer fordringer har jo meget forskellige rentesatser.

Nok så usædvanligt er det måske, at vi her kan definere rente ikke blot for fordringer, men for alle varer – vi har en spegepølse-rente (på ethvert tidspunkt), en leverpostej-rente osv.

8.1.5. Denne observation fører til, at vi må gå vores fortolkning efter i sømmene. Vi opdager da, at denne måde at indfortolke tiden i vores model på, hvorved vi kan bruge modellen i mere generelle situationer end umiddelbart antaget, ikke er helt gratis – vi har nemlig dermed forudsat noget om institutionerne i denne økonomi over tid.

Nærmere bestemt har vi jo antaget, at der er et marked (givet ved et prissystem), hvor *alle varerne kan handles.* Med andre ord kan agenterne indgå kontrakter om leverancer af alle varer på alle de T tidspunkter. For eksempel kan man købe leverpostej i dag (tidspunkt 1) mod levering af spegepølser om 14 år.

Markeder af denne type findes faktisk for visse varer, men de findes til gengæld ikke for en masse andre varer. Den markedsinstitution, vi har specificeret, er således ikke helt realistisk.

8.1.6. Faktisk behøver vi ikke alle de mange markeder af typen "leverpostej i dag mod spegepølse om 14 år", for at modellen kan bruges.

Antag, at det er muligt i dag at lave kontrakter af typen "vare K på tidspunkt t^1 mod vare K på tidspunkt t^2" for alle mulige t^1 og t^2, samt kontrakter af formen "vare q på tidspunkt t^1 mod vare K på tidspunkt t^1" for alle q og t^1. Med disse markedsmuligheder kan alle agenter opnå nøjagtigt de samme handeler som på et marked givet ved et prissystem p som i 8.1.2.

8.1.7.* Lad nemlig prisen på det marked, hvor vare K handles til levering på forskellige tidspunkter, være $p_K = (p_{K1}, \dots, p_{KT})$, og på markedet for varer til levering på tidspunkt t være $\bar{p}_t = (\bar{p}_{1t}, \ldots, \bar{p}_{Kt})$. Hvis vi definerer p ved

$$p_{qt} = \bar{p}_{qt} \frac{p_{Kt}}{p_{K1}},\ q = 1, \ldots, K-1,\ t = 1, \ldots, T,$$

da vil enhver handel z på markedet bestemt ved prissystemet p, kunne stykkes sammen af handeler på delmarkederne.

Hertil skrives z som

$$z = (z_1, \ldots, z_T),$$

hvor $z_t = (z_{1t}, \ldots, z_{Kt})$, $t = 1, \ldots, T$. Hvis $p \cdot z \leq 0$, er $\sum_{t=1}^T \sum_{q=1}^K p_{qt} z_{qt} \leq 0$. Sættes $\sum_{q=1}^K p_{qt} z_{qt} = k_t$, har vi $\sum_{t=1}^T k_t \leq 0$.

For hvert t kan vi nu definere en handel

$$\hat{z}_t = \left(z_{1t}, \ldots, z_{Kt} - \frac{1}{p_{Kt}} k_t \right)$$

på markedet for varer til tidspunkt t ($\hat{z}_t$ er fremkommet ved, at vi i sidste koordinat af z_t har trukket $(1/p_{Kt})k_t$ fra). Dette er faktisk en handel på markedet, idet

$$\sum_{q=1}^K \bar{p}_{qt} \hat{z}_{qt} = \frac{p_{K1}}{p_{Kt}} \sum_{q=1}^K p_{qt} \hat{z}_{qt} = 0.$$

Vektoren z kan da fås som

$$z = (\hat{z}_1, 0, \ldots, 0) + (0, \hat{z}_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \hat{z}_T) + z_K,$$

hvor z_K er vektoren med (K, t)'te koordinat lig $(1/p_{Kt})k_t$ for $t = 1, \ldots, T$, og nul på de øvrige pladser. Da

$$\sum_{t=1}^T p_{Kt} \frac{1}{p_{Kt}} k_t = \sum_{t=1}^T k_t \leq 0,$$

er dette en handel på markedet for vare K, og vi er færdige.

8.1.8. Selv om det således ikke er nødvendigt, at der kan afsluttes kontrakter om fremtidig levering for alle mulige varer og tidspunkter, er kravet til institutionerne stadig strenge. Det har derfor interesse at betragte situationer, hvor der nok er flere perioder, men hvor der ikke er markeder i dag for varer leveret i fremtiden. Forbindelsen mellem nutid og fremtid består da i, at visse varer kan overføres til næste periode. Dette leder til de såkaldte *temporære ligevægtsmodeller.*

8.2. Temporære ligevægte

8.2.1. Lad os betragte en økonomi med privat ejendomsret, men (for at gøre sagen simpel) uden producenter. Hver forbruger lever i (eller mindre dramatisk, hans økonomiske horisont strækker sig over) to perioder, “i dag” og “i morgen”.

Som tidligere har vi K forskellige varer i hver periode. Men der er nu ikke længere markeder i dag for varer leveret i morgen. Forbindelsen mellem de to perioder kommer ind derved, at der er én (og kun én) vare, den K’te, der kan gemmes fra en periode til den næste. Forbrugerne kan altså, hvis de ønsker et forbrug i periode 2, der er større end deres initialbeholdning for denne periode, købe vare K i dag og så sælge den i morgen. Vare K fungerer altså som værdiopbevaringsmiddel, og vi vil kalde varen “penge”. Blot skal vi være opmærksomme på, at vare K har én, men ikke nødvendigvis samtlige af de egenskaber, vi intuitivt forbinder med “penge”.

8.2.2. Om hver forbruger i vil vi antage, at forbrugsmulighedsområdet X_i, som jo er en delmængde af varerummet $\mathbb{R}^{2K}$, har formen $X_i = \mathbb{R}^{2K}_+$, og vi skriver elementer i X_i som $x_i = (x_i^1, m_i^l, x_i^2, m_i^2)$, hvor x_i^1 (x_i^2) angiver forbruget af de $K-1$ første varer i periode 1 (2), og m_i^1 (m_i^2) er den beholdning af vare K (penge), som forbrugeren vil ligge inde med ved slutningen af periode 1 (2).

Om nyttefunktionen S_i antager vi, at $S_i(x_i)$ ikke afhænger af m_i^1 og m_i^2 – forbrugeren har ikke nogen direkte fornøjelse af at forbruge denne vare. Derimod skal vi se, at han med fordel kan bruge den til noget andet.

Initialbeholdningen $\omega_i \in \mathbb{R}^{2K}_+$ vil vi skrive som $\omega_i = (\omega_i^1, \bar{m}_i^1, \omega_i^2, 0)$, hvor ω_i^1 og ω_i^2 er den beholdning af de $K-1$ forgængelige varer, forbruger i modtager ved starten af periode 1 og 2, og $\bar{m}_i^1$ er den beholdning af penge, han har ved starten af periode 1. Vi har for simpelheds skyld antaget, at han ikke får tildelt penge i periode 2.

Forbrugerens situation er nu følgende: Der er givet priser $p = (p_1, \dots, p_{K-1})$ på de $K-1$ almindelige varer og en pris p_K på vare K (penge), hvortil disse varer kan handles i dag. Forbruger i kan således købe ethvert (x_i^1, m_i^1), for hvilket

$$(*) \qquad p \cdot x_i^1 + p_K m_i^1 \leq p \cdot \omega_i^1 + p_K \bar{m}_i^1,$$

hvorved han kan opnå forbruget x_i^1 i dag og have en beholdning m_i^1 af penge at overføre til næste periode.

8.2.3. Da forbrugeren som antaget ikke har nogen umiddelbar fornøjelse af at ligge inde med penge, må hans beholdning m_i^1 være bestemt af, hvad han kan bruge den til i næste periode. Her kan han sælge den på markedet (i morgen) og købe almindelige varer. Hvor meget han kan købe, afhænger af, hvilke priser der gælder i morgen.

Disse priser er ikke kendte i dag – det drejer sig jo om noget, der sker i fremtiden. Vi vil antage, at hver forbruger i har en forventning p_i^* om priserne på de $K-1$ varer og p^*_{Ki} om pengenes værdi i morgen. Disse forventninger afhænger af, hvilke priser han observerer i dag (samt formodentlig af priserne i en række tidligere perioder, som imidlertid i periode 1 er kendte størrelser), altså

$$\begin{aligned} p^*_i &= \psi_i(p, p_K) \\ p^*_{Ki} &= \psi_{Ki}(p, p_K). \end{aligned}$$

Den konkrete funktionsform for ψ_i og ψ_{Ki} skal vi ikke komme ind på her – man kunne tænke sig (1) "bevidstløse" forventninger, hvor $p^*_i = p$, $p^*_{Ki} = p_K$, (2) inflationsforventning, hvor $p^*_i = \lambda p$, $\lambda > 1$, $p^*_{Ki} = p_K$, dvs. varerne bliver dyrere målt i penge, og mange andre former. Egentlig var det nok mere realistisk at antage, at forventningerne ikke er én bestemt pris, men snarere en sandsynlighedsfordeling over priser, men det vil føre for vidt i denne sammenhæng.

Læg mærke til, at de enkelte forbrugeres forventninger ikke behøver at stemme overens – og at de ikke behøver at gå i opfyldelse.

8.2.4. Forbruger i's problem er nu fastlagt: Han skal vælge x^1_i, m^1_i og x^2_i, således at han maksimerer $S_i(x^1_i, x^2_i)$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} p \cdot x^1_i + p_K m^1_i &\leq p \cdot \omega^1_i + p_K \bar{m}^1_i \\ p^*_i \cdot x^2_i &\leq p^*_i \cdot \omega^2_i + p^*_{Ki} m^1_i. \end{aligned}$$

Disse betingelser angiver, at forbruget og pengebeholdningen i hver periode skal kunne købes for værdien af initialbeholdningen af varer plus værdien af den initiale beholdning af penge. I periode 2 vil han ikke købe penge (her slutter nemlig hans horisont, så han bekymrer sig ikke om fremtiden ud over periode 2). Vi har altså $m^2_i = 0$, alle i.

8.2.5. Vi kan nu definere en *temporær ligevægt* som en tilstand $(x_1, \ldots, x_m)$ og priser (p, p_K), således at

(1) tilstanden er opnåelig i første periode, dvs. $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, m$, og

$$\sum_{i=1}^m x^1_i = \sum_{i=1}^m \omega^1_i,$$
$$\sum_{i=1}^m m^1_i = \sum_{i=1}^m \bar{m}^1_i,$$

(2) for hver forbruger i er (x^1_i, m^1_i, x^2_i) løsning til forbrugerens problem (jf. 8.2.4).

Her skal vi især lægge mærke til betingelse (1): Vi forlanger kun, at 1. periode skal kunne gennemføres – hvilket vil sige, at efterspørgsel skal være lig udbud for alle de varer, der faktisk kan handles. Periode 2 indgår kun indirekte gennem forbrugernes forventninger. Når periode 1 er gået, tænkes hele processen at starte igen - med nye forventninger om priserne i fremtiden (periode 3).

8.2.6. Lad os vende tilbage til forbrugerens problem i 8.2.4. Umiddelbart ser det noget mere kompliceret ud end de tidligere udgaver af FP, for så vidt som der er to bibetingelser (én for hver periode) og m_i^1 indgår i begge. Vi kan imidlertid splitte løsningen op i en to-trins-procedure, idet der oplagt må gælde følgende (det såkaldte "optimalitetsprincip for dynamisk programmering"):

> *Hvis* $(\tilde{x}_i^1, \tilde{m}_i^1, \tilde{x}_i^2)$ *er en løsning til forbrugerens problem, da er* $\tilde{x}_i^2$ *løsning til*
>
> $$(I) \qquad \begin{array}{l} \textit{max}\ S_i(\tilde{x}_i^1, x_i^2) \\ \textit{under bibetingelsen} \\ p_i^* \cdot x_i^2 \leq p_i^* \cdot \omega_i^2 + p_{Ki}^* \tilde{m}_i^1. \end{array}$$

Det vil sige, at valget af forbrug i periode 2 er det bedste valg givet valget i periode 1. Vi kan nu for alle tænkelige $(\tilde{x}_i^1, \tilde{m}_i^1)$ løse problemet (I), som er et sædvanligt FP. Det giver en sammenhæng

$$x_i^2 = g_i(\tilde{x}_i^1, \tilde{m}_i^1),$$

og dette kan vi benytte til at løse problemet

$$(II) \qquad \max S_i(\tilde{x}_i^1, g_i(\tilde{x}_i^1, \tilde{m}_i^1))$$

over alle $(\tilde{x}_i^1, \tilde{m}_i^1)$, der opfylder (*) fra 8.2.2. Løsningen hertil giver os netop løsningen til forbrugerens problem.

8.2.7. Ud over en praktisk anvisning på, hvorledes man kan løse et fler-periode-optimeringsproblem periode for periode, giver denne procedure også en nyttig økonomisk fortolkning af, hvad der sker i en temporær ligevægt. Lad os for at få denne fortolkning tydeligt frem antage, at nyttefunktionen kan skrives

$$S_i(x_i^1, x_i^2) = u_i^1(x_i^1) + u_i^2(x_i^2),$$

hvor u_i^1 og u_i^2 er funktioner fra $\mathbb{R}_+^{K-1}$ til $\mathbb{R}$ (dvs. at forbruget i periode 1 og 2 indgår separabelt i nyttefunktionen S_i, jf. 3.2.12). I denne situation vil løsningen til problem (I) i 8.2.6 *slet ikke afhænge af* x_i^1, vi har altså

$$x_i^2 = g_i(\tilde{m}_i^1),$$

og i problem (II) skal vi altså maksimere

$$u_i^1(x_i^1) + u_i^2(g_i(m_i^1))$$

over alle (x_i^1, m_i^1), der opfylder (*) fra 8.2.2.

Dette er et helt sædvanligt FP. Der er kun sket det, at vare K (penge), der fra starten ikke havde nogen nytte, alligevel har fået det, idet vi kan fortolke $u_i^2(g_i(m_i^1))$ som forbrugerens nytte af at ligge med pengebeholdningen m_i^1. Nytten af pengene er således nytten af det bedste bundt, man kan købe (i morgen) for disse penge.

Den temporære ligevægt (8.2.5) bliver dermed til en ganske sædvanlig Walras-ligevægt i periode 1 med K varer, hvor forbrugeren har en nyttefunktion, der afhænger af samtlige varer (også penge), idet nytten af penge resumerer det forhold, at der er forventninger til fremtiden. Der er således en rationel begrundelse for, at der er nytte knyttet til penge, også selv om de ikke forbruges direkte.

8.3. Generationsøkonomier

8.3.1. I det foregående afsnit betragtede vi den situation, hvor fremtiden var "klippet væk" – i hvert fald i relation til de markeder, der kan handles på. I dette afsnit vil vi så at sige gå til den modsatte yderlighed, nemlig at tage hensyn til det uomstridelige faktum, at der ikke er en bestemt dato T, således at al økonomisk aktivitet stopper.

Umiddelbart ser forudsætningen om endelig horisont ikke urimelig ud – T kan jo være valgt så stor, at alle agenter i live på tidspunkt 1 er døde i mellemtiden. Det er imidlertid ikke helt tilfredsstillende, for der er i så fald kommet nye agenter til (ellers var der jo ikke nogen at handle med) og hvad med dem?

En illustration af vanskelighederne kan fås ved at antage, at der er en vare (på hvert tidspunkt), som ingen forbruger har nytte af at forbruge, men som kan gemmes til senere perioder og eventuelt handles med "rigtige varer". Hvad vil prisen være på denne vare? I den sidste periode T er der klart nok ingen, der vil have denne vare, for hvad skulle de med den? Prisen er derfor 0. Men så er der ingen grund til at købe den i periode $T-1$, for den er alligevel intet værd i næste periode. Og så fremdeles: Prisen vil altid være 0. Denne konklusion virker ikke helt rimelig.

8.3.2. Hvis vi som sædvanlig har daterede varer, og der er uendeligt mange tidspunkter $t = 1, 2, \ldots$, vil der være uendeligt mange varer. For at kunne håndtere denne situation vil vi introducere nogle simplificerende forudsætninger.

Antag, at der i hver periode t kun er én vare. Videre er der i hver periode t to forbrugere, en "gammel" og en "ung". Hver forbruger lever i to (på hinanden følgende) perioder. (Disse antagelser er naturligvis temmelig drastiske – det afgørende er blot, at der i hver periode er et endeligt antal varer og forbrugere, og at ingen forbruger lever evigt).

Vi vil i det følgende antage, at alle forbrugere er ens i den forstand, at forbrugeren født på tidspunkt t, har nyttefunktion

$$S_t(x_t^t, x_{t+1}^t) = (x_t^t)^{\frac{1}{3}}(x_{t+1}^t)^{\frac{2}{3}},$$

hvor $x_t^t \geq 0$ og $x_{t+1}^t \geq 0$ er hans forbrug af varen i perioderne t og $t+1$.

På tidspunkt 1 er der endvidere en "gammel" forbruger (med forbrug x_1^0 i denne periode); vi antager, at hans nyttefunktion er givet ved $S_0(x_1^0) = x_1^0$.

8.3.3. Antag, at den ene vare ikke kan gemmes fra én periode til den næste. I så fald er den eneste mulige handel på tidspunkt t et bytte mellem gammel og ung af den samme vare, hvad der jo ikke giver nogen forbedring for nogen af dem. Hver enkelt forbruger t forbruger derfor sin egen initialbeholdning, dvs. $x_1^0 = \omega_1^0$ og $(x_t^t, x_{t+1}^t) = (\omega_t^t, \omega_{t+1}^t)$, $t = 1, 2, \ldots$.

Hvis f.eks. $(\omega_t^t, \omega_{t+1}^t) = (3, 0)$ for alle t, må forbrugerne bruge det hele i deres første leveår og leve på sultegrænsen i det andet – varen kan ikke gemmes. Denne manglende betryggelse af alderdommen kunne vi imidlertid forsøge at råde bod på ved følgende konstruktion:

Lad forbruger 1 (den "nyfødte" i periode 1) give en enhed vare til den gamle i periode 1. Det vil den gamle i hvert fald blive glad for. Til gengæld vil forbruger 1 få et papir, der berettiger ham til at modtage 1 enhed vare i sin alderdom. Så vil også forbruger 1 være bedre stillet. Den enhed, han skal have, får han fra forbruger 2, der får papiret til gengæld, og således fortsættes gennem generationerne.

Vi har således ved at indføre en bestemt type fordringer gjort det muligt for økonomien at nå en bedre tilstand. Det er fristende at kalde disse fordringer "penge" og betragte ovenstående som et argument for, at der vil være penge i økonomien. Det er nok at gå for vidt; men vores overvejelser giver i hvert fald én – af flere mulige – indfaldsvinkel til en behandling af penge i generel ligevægtsteori.

8.3.4. Man kunne nu fristes til at tro, at hvis der i vores økonomi indføres fordringer, som kan købes og sælges mod varer, vil økonomien i en ligevægt komme i en Pareto-optimal tilstand. Det er imidlertid ikke rigtigt.

Antag, at der i hver periode t noteres en pris p_t på varen (målt relativt til prisen på fordringer). Forbruger t kan da opnå ethvert forbrug (x_t^t, x_{t+1}^t), som opfylder

$$\begin{aligned} p_t x_t^t + m_t^t &\leq p_t w_t^t, \\ p_{t+1} x_{t+1}^t &\leq p_{t+1} \omega_{t+1}^t + m_t^t, \end{aligned}$$

idet han i sit første leveår kan købe varer og fordringer for sin indkomst og i sin alderdom kan bruge indkomst og beholdning af fordringer til varekøb. Ved addition fås en "sædvanlig" budgetrestriktion

$$p_t x_t^t + p_{t+1} x_{t+1}^t \leq p_t \omega_t^t + p_{t+1} \omega_{t+1}^t$$

(de to måder at skrive budgetrestriktionen på er ækvivalente, hvis m_t^t kan være negativ, dvs. hvis forbrugeren kan få kredit; dette antages i det følgende).

8.3.5. En ligevægt i vores økonomi er en følge $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ af bundter, hvor $x^0 = x_1^0$ og $x^t = (x_t^t, x_{t+1}^t)$, $t = 1, 2, \ldots$, samt en pris $p = (p_1, p_2, \ldots)$, således at

– x_1^0 maksimerer S_0 på budgetmængden

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \mid p_1 x \leq p_1 \omega_1^0\}$$

og for $t = 1, 2, \ldots$,

– x_t^t maksimerer S_t på budgetmængden

$$\{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_t x_t^t + p_{t+1} x_{t+1}^t \leq p_t \omega_t^t + p_{t+1} \omega_{t+1}^t\}$$

og $(x^0, x^1, \ldots)$ er opnåelig, dvs. for hvert t er

$$x_t^t + x_t^{t-1} = \omega_t^t + \omega_t^{t-1}$$

(dvs. samlet forbrug af varer i periode t = samlet beholdning af varer i periode t).

8.3.6. Antag nu, at $\omega^t = (1, 1)$, $t = 1, 2, \ldots$. Da er $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ med $x^0 = \omega^0$, $x^t = \omega^t$, $t = 1, 2, \ldots$ en ligevægt ved prisen $p = (1, 2, 4, \ldots, 2^{t-1}, \ldots)$ (idet det marginale substitutionsforhold for hver forbruger $t \geq 1$ er $2 = p_{t+1}/p_t$ i punktet $(1, 1)$).

Tilstanden $(x^0, x^1, x^2, \ldots)$ er imidlertid ikke Pareto-optimal: hvis vi i hver periode t tager $1/2$ enhed af varen fra forbruger t og giver til forbruger $t - 1$, fås tilstanden $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots)$ med $\bar{x}^0 = 3/2$, $\bar{x}^t = (1/2, 3/2)$, $t = 1, 2, \ldots$. Vi har

$$S_0(\bar{x}^0) = \frac{3}{2} > 1 = S_0(x^0)$$

og

$$S_t(\bar{x}^t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > 1 = S_t(x^t),$$

så alle er bedre stillet. Vi konkluderer:

En ligevægt er ikke nødvendigvis Pareto-optimal.

8.3.7. Vi ser således, at Hovedsætning I (5.3.3) ikke længere holder, når forudsætningen om endelig tidshorisont fjernes. Konklusionen giver nok en gang (jf. diskussionen af eksterne effekter og offentlige goder i kapitel 7) anledning til en vis skepsis over for "markedsmekanismen", som altså ikke garanterer efficient allokering over tid.

Eksemplet i 8.3.6 var måske lidt specielt: Dels var initialbeholdningen selv ligevægt, hvad der dog skyldes hensynet til et simpelt eksempel, dels, og nok så væsentligt, var priserne karakteriseret af en temmelig kraftig inflation. Dette var væsentligt: Det kan – under en række forudsætninger – vises, at en ligevægt er Pareto-optimal, hvis og kun hvis der om prisfølgen $(p_1, p_2, \ldots)$ gælder, at

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{p_t}$$

vokser over alle grænser. I vort eksempel var $p_t = 2^{t-1}$, så rækken

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{p_t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^{t-1}}$$

er konvergent.

8.4. Noter

8.4.1. Modellen med daterede varer danner udgangspunkt for vækst- og kapitalteorien, se f.eks. Bliss (1975). Temporære ligevægte blev introduceret af Hicks (1939). En gennemgang af den moderne teori findes i Grandmont (1977).

8.4.2. Generationsmodellerne blev introduceret af Samuelson (1958), og der er en omfattende litteratur om sammenhængen mellem ligevægte og optimalitet, se f.eks. Balasko og Shell (1980).

8.5. Opgaver

8.5.1. En *investeringskalkule* benyttes til at afgøre, om en given betalingsstrøm $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ over k perioder (hvor hver enkelt betaling kan være positiv eller negativ) vil føre til en formueforøgelse.

Giv en begrundet anvisning på, hvorledes en sådan investeringskalkule skal opstilles, og diskutér forudsætningerne.

8.5.2. (Nytte af penge). Betragt en forbruger, som planlægger sit forbrug i dag og i en fremtidig periode. Der er ét gode, penge, som kan overføres til næste periode. Forbrugeren har en given indkomst R^1 i første periode og R^2 i anden periode, og priserne i dag er p, mens der imorgen forventes priser $p^* = \psi(p)$.

Opstil forbrugerens problem og forklar, hvorledes man kan definere forbrugerens nytte af penge.

8.5.3. Betragt en overlappende generationsmodel med én vare i hver periode, der ikke kan gemmes fra én periode til den næste. Der er to typer af forbrugere, specificeret ved nyttefunktioner

$$S_1^t(x_t, x_{t+1}) = x_t^{\frac{1}{3}} x_{t+1}^{\frac{2}{3}}$$

for type 1, hvor x_t og x_{t+1} betegner forbrug i periode t og periode $t+1$, og

$$S_2^t(x_t, x_{t+1}) = x_t^{\frac{2}{3}} x_{t+1}^{\frac{1}{3}}$$

for type 2. Hver generation indeholder netop én forbruger af hver type. Begge typer har en initialbeholdning på $(1, 1)$.

En ligevægt kaldes *steady-state,* hvis forbrugere af samme type får samme bundt (bortset fra dateringen). Find en steady-state ligevægt i den betragtede økonomi.

9. Usikkerhed

9.1. Betingede varer

9.1.1. På samme måde som vi tidligere indfortolkede tiden i varebegrebet, er vi også i stand til at behandle usikkerhed ved passende fortolkning af varerne.

Det kræver ikke megen begrundelse, at vi forsøger at få usikkerhedsaspektet med ind i vor teori: typisk vil virkelighedens forbrugere ikke på stående fod kunne afgøre, hvilke forbrugsplaner der er bedst (især hvis de indeholder fremtidigt forbrug), idet det afhænger af ydre omstændigheder, han ikke er herre over. Producenternes produktionsplaner vil ligeledes være underkastet usikkerhed (eks.: landbrug, olieboring.).

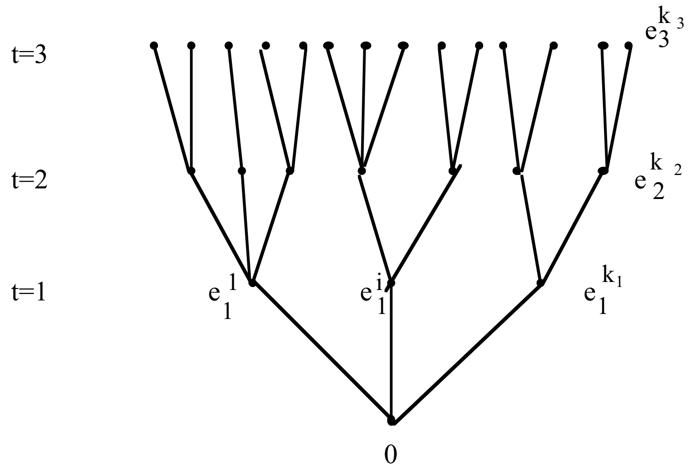
9.1.2. For at få usikkerhed ind i modellen må vi først specificere, hvad det er, som er usikkert. Vi vil antage, at usikkerheden fremkommer ved, at økonomiens omgivelser ("naturen") kan være i én af et endeligt antal E af alternative tilstande. Hvad der karakteriserer disse tilstande, er for så vidt ligegyldigt – hvis vi specielt er interesseret i landbruget, kan det være de to tilstande "tør sommer" og "våd sommer" eller de fire alternativer, der kommer ud af at kombinere disse med "streng vinter" og "mild vinter".

Hvis vi endvidere (som i afsnit 8.1) betragter økonomien over T tidspunkter, må der gælde, at efterhånden som t vokser, ved man mere og mere om, hvilken af de mulige tilstande e som faktisk indtræffer. Det betyder, at man for hvert tidspunkt $t = 1, \dots, T$ har delmængder $e_t^1, \dots, e_t^{k_t}$ af mængden $\{1, \dots, E\}$ af tilstande, som er indbyrdes disjunkte og udtømmer mængden (en såkaldt klassedeling). Disse delmængder vil blive kaldt *hændelser til tidspunkt* t. Hændelserne til tidspunkt T svarer til de oprindelige tilstande $1, \dots, E$.

Ved tidspunkt t ved alle agenter, til hvilken hændelse på tidspunkt t den tilstand (hændelse til tidspunkt T), som faktisk vil indtræffe, tilhører. Hændelserne til de forskellige tidspunkter kan illustreres ved et såkaldt træ (i Figur 9.1 for $T = 3$).

9.1.3. Med terminologien indført ovenfor vil vi nu definere en betinget vare som et bestemt materielt gode (evt. tjeneste) karakteriseret ved kvalitet, leveringssted og -tid t *samt den hændelse ved tidspunkt* t, ved hvilken den skal leveres. Hvis en forbruger har købt noget af denne (betingede) vare, betyder det, at han får den pågældende vare, hvis hændelsen indtræffer og ingenting ellers.

Vi kan nu indføre priser på sådanne betingede varer. Prisen på en betinget vare er således det beløb, der skal betales for en kontrakt, som går ud på leverance af varen, hvis hændelsen indtræffer, og ingen leverance, hvis den ikke indtræffer.



Figur 9.1

Hvis man ønsker at få en vare leveret uanset hændelse, må man købe varen betinget af første hændelse, anden hændelse osv.

9.1.4. Med vore nye fortolkninger af varerne har vi teorien fra de foregående kapitler til rådighed. Det er dog (ligesom i afsnit 8.1) på sin plads at overveje, hvad de forskellige antagelser gjort undervejs i teorien betyder i denne situation.

Som et eksempel på dette kan vi betragte forudsætning F3 (3.2.6). Når varerne er betingede, betyder denne forudsætning, at forbrugerne foretrækker sikkert forbrug fremfor risiko: Lad nemlig x^1 og x^2 være to bundter, som er ens i alle koordinater på nær to, der angiver forbruget af en vis vare betinget af, at en bestemt hændelse indtræffer eller ikke indtræffer. Antag, at disse to koordinater er b og c i bundtet x^1 (hvor vi antager $b > c$), og at de er byttet om (dvs. c og b) i bundtet x^2. Hvis nu der gælder $S_i(x^1) = S_i(x^2)$ for en vilkårlig forbruger i, får vi af F3, at bundtet

$$\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$$

er bedre end x^1 og x^2. Dette bundt har de pågældende koordinater $(b + c)/2$, så forbrugeren har altså $(b + c)/2$ af varen *uanset* hændelse (sikkert forbrug). Man siger om en sådan forbruger, at han har *risiko-aversion.*

9.1.5. Markeder for betingede varer er velkendt fra virkeligheden i form af forsikringsmarkeder. På den anden side er det naturligvis ikke alle varer, man kan købe gennem forsikringskontrakter (det er heller ikke nødvendigt for teorien, jf. 8.1), ligesom det heller ikke er alle usikre hændelser, man kan forsikre sig imod. Derfor er denne måde at behandle usikkerhed på ikke udtømmende, men den er særdeles nyttig som et første skridt.

9.2. Forventet nytte

9.2.1. I visse situationer kan vi komme lidt længere i analysen af valg under usikkerhed, end hvad vi nåede i forrige afsnit, nemlig når vi kan bruge sandsynlighedsregningen som hjælpemiddel. Denne sidste er netop udviklet i forbindelse med analysen af situationer, hvor det ikke er muligt at forudsige det præcise udfald af en usikker hændelse, men hvor der alligevel foreligger en vis systematik, som man kan drage fordel af. Dette burde jo være til hjælp her.

Der er dog visse forbehold; ikke alle former for usikkerhed lader sig beskrive ved sandsynligheder. Det skal vi ikke gå nærmere ind på, idet vi i dette afsnit skal indskrænke os til at se på valg under omstændigheder, der så at sige er ideelle for den sandsynlighedsteoretiske approach.

9.2.2. Antag, at en beslutningstager skal træffe sit valg i en situation med usikkerhed. Denne sidste er af en sådan art, at en bestemt ud af i alt k mulige gevinster eller udfald opnås. Hvad det er for gevinster, er forsåvidt underordnet. Det kan være gevinster i en tombola – en tøjbamse, et kaffestel i lyserødt plast osv. – eller det kan være forskellige pengebeløb.

Den samlede mængde af alternativer, som der skal vælges imellem, antages at være alle mulige *lotterier* med de k gevinster som resultat. Ethvert sådant lotteri kan karakteriseres ved sin sandsynlighedsfordeling $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$, hvor π_j angiver sandsynligheden for at den j'te gevinst udtrækkes; her er hvert $\pi_j \geq 0$ og $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$.

Mængden af alternativer Π er altså alle sådanne vektorer π; geometrisk er dette jo simplexen i $\mathbb{R}^k$.

9.2.3. I overensstemmelse med den generelle teori om individuelt valg fra kapitel 2 vil vi om vor beslutningstager antage, at hans præferencer over alternativerne (lotterierne) er givet ved en *total preordning* $\succsim$ på Π. Da vi interesserer os for at beskrive $\succsim$ ved en nyttefunktion, vil vi med det samme antage:

(1) $\succsim$ *er en kontinuert total preordning*

(for egenskaben kontinuitet, se afsnit 3.2.1). Vi ved da, at $\succsim$ kan repræsenteres ved en kontinuert nyttefunktion; vi ønsker imidlertid en repræsentation med ganske bestemte egenskaber, så derfor vil vi tilføje endnu en antagelse.

For at motivere denne vil vi se lidt mere på fortolkningen: Givet to lotterier $\pi^0 = (\pi_1^0, \ldots, \pi_k^0)$ og $\pi^1 = (\pi_1^1, \ldots, \pi_k^1)$ kan vi konstruere et *sammensat lotteri*, idet vi trækker lod mellem lotteriet π^0 med sandsynlighed α og lotteriet π^1 med sandsynligheden $(1 - \alpha)$. Det antages, at beslutningstageren identificerer dette lotteri med lotteriet

$$\alpha\pi^0 + (1-\alpha)\pi^1 = (\alpha\pi_1^0 + (1-\alpha)\pi_1^1, \ldots, \alpha\pi_k^0 + (1-\alpha)\pi_k^1).$$

Lad os nu betragte to par af lotterier, $(\pi^0, \hat{\pi}^0)$ og $(\pi^1, \hat{\pi}^1)$. Vi antager, at $\pi^0 \succ \hat{\pi}^0$ og $\pi^1 \succ \hat{\pi}^1$. Hvis vi sammensætter disse lotterier med sandsynlighed α og

$(1-\alpha)$, således at vi får henholdsvis $\gamma = \alpha\pi^0 + (1-\alpha)\pi^1$ og $\hat{\gamma} = \alpha\hat{\pi}^0 + (1-\alpha)\hat{\pi}^1$, da er begge “gevinster” i lotteriet γ bedre for vor beslutningstager end de tilsvarende gevinster i lotteriet $\hat{\gamma}$, og det er derfor rimeligt at antage, at γ foretrækkes for $\hat{\gamma}$; lige meget hvad der sker, kommer der jo noget foretrukket ud ved det sammensatte lotteri γ. Vi formulerer dette som en antagelse om $\succsim$:

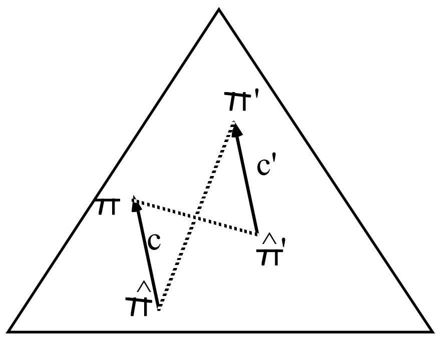
(2) Lad $\pi^0, \hat{\pi}^0, \pi^1, \hat{\pi}^1 \in \Pi$, antag $\pi^0 \succ \hat{\pi}^0$, $\pi^1 \succsim \hat{\pi}^1$, og lad $0 < \alpha < 1$. Da er $\alpha\pi^0 + (1-\alpha)\pi^1 \succ \alpha\hat{\pi}^0 + (1-\alpha)\hat{\pi}^1$.

Bemærk, at vi her har tilladt, at det kun er for ét af parrene, at det første lotteri er strengt foretrukket for det andet; dette par indgår dog med positiv vægt i det sammensatte lotteri.

9.2.4. For $\pi, \hat{\pi} \in \Pi$ med $\pi \succ \hat{\pi}$, lad

$$c = \pi - \hat{\pi};$$

da π og $\hat{\pi}$ er vektorer med koordinatsum 1, ligger c i mængden af k-vektorer med koordinatsum 0. Lad nu π' og $\hat{\pi}'$ være to vilkårlige lotterier, om hvilke vi blot ved, at $\pi' - \hat{\pi}' = c$ (se Figur 9.2). Vi vil vise, at der da også gælder $\pi' \succ \hat{\pi}'$.



Figur 9.2

Antag først, at der gælder $\hat{\pi}' \succsim \pi'$. Vi kan da bruge (2) på parrene $(\pi, \hat{\pi}), (\hat{\pi}', \pi')$ med $\alpha = 1/2$, hvilket giver os, at

$$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\hat{\pi}' \succ \frac{1}{2}\hat{\pi} + \frac{1}{2}\pi';$$

men vi har også, at

$$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\hat{\pi}' = \frac{1}{2}(\hat{\pi} + c) + \frac{1}{2}(\pi' - c) = \frac{1}{2}\hat{\pi} + \frac{1}{2}\pi',$$

hvilket fortæller os, at de to sammensatte lotterier faktisk er ens, og derfor kan det ikke være foretrukket for sig selv. Fra denne modstrid konkluderer vi, at der må gælde $\pi' \succ \hat{\pi}'$.

Konsekvensen af dette er, at hvis en vektor c med koordinatsum 0 fremkommer som

$$c = \pi - \hat{\pi} \text{ med } \pi \succ \hat{\pi},$$

da vil der gælde $\pi' \succ \hat{\pi}'$ for alle par $(\pi', \hat{\pi}')$ af lotterier, som har $\pi' - \hat{\pi}' = c$. Dette viser sig at være en særdeles nyttig egenskab.

9.2.5. Lad nemlig C være mængden

$$C = \{c \in \mathbb{R}^k \mid \text{ der findes } \pi, \hat{\pi} \in \Pi \text{ med } \pi \succ \hat{\pi},\ \pi - \hat{\pi} = c\}.$$

Da er C konveks, for hvis $c, c' \in C$, har vi

$$\begin{gathered} \pi - \hat{\pi} = c,\ \pi \succ \hat{\pi} \\ \pi' - \hat{\pi}' = c',\ \pi' \succ \hat{\pi}', \end{gathered}$$

og ifølge (2) i 9.2.4 er $\alpha\pi + (1-\alpha)\pi' \succ \alpha\hat{\pi} + (1-\alpha)\hat{\pi}'$. Men

$$\alpha\pi + (1-\alpha)\pi' - [\alpha\hat{\pi} + (1-\alpha)\hat{\pi}'] = \alpha c + (1-\alpha)c',$$

som altså er i C.

Vi har videre, at 0 ikke er i C (for $\succ$ er irreflexiv). Altså kan vi separere 0 fra C med et hyperplan: Der findes $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$, $u \neq 0$, således at $u \cdot c > 0$ for alle $c \in C$ (dette følger ikke helt slavisk af separationssætningen i App.12, men det er dog ret ligetil at omformulere denne til vort tilfælde; hvis C ikke er tom, kan u vælges, således at ikke alle koordinater er lige store).

Skriver vi dette ud, har vi, at der gælder

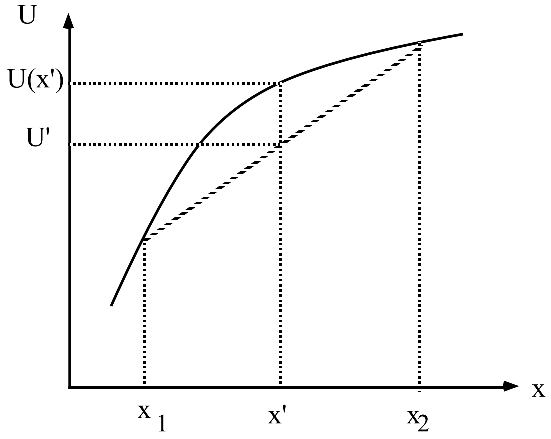
$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j u_j > \sum_{j=1}^{k} \hat{\pi}_j u_j$$

for alle $\pi, \hat{\pi} \in \Pi$ med $\pi \succ \hat{\pi}$. Hvis omvendt $\sum_{j=1}^{k} \pi_j u_j > \sum_{j=1}^{k} \hat{\pi}_j u_j$ for et par $(\pi, \hat{\pi})$ af lotterier, da kan der ikke gælde $\hat{\pi} \succsim \pi$ (overvej!). Følgelig må vi have $\pi \succ \hat{\pi}$, og i alt konkluderer vi, at vi har en nyttefunktion U defineret på alle lotterier π ved

$$U(\pi) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j u_j,$$

som repræsenterer de givne præferencer $\succsim$.

Læg mærke til, at nytten af et vilkårligt alternativ, dvs. et lotteri, findes ved at udregne *middelværdien* af nytten af hver af gevinsterne; specielt er tallene $u_1, \ldots, u_k$ nytten af gevinsterne selv, eller, om man vil, nytten af de lotterier, som giver en bestemt gevinst med sandsynligheden 1. I forlængelse af dette er det ikke så overraskende, at man om en beslutningstager, der opfylder betingelserne (1) og



Figur 9.3

(2) i 9.2.3 siger, at hans præferencer tilfredsstiller *forventet-nytte*-hypotesen (eng.: expected utility). Adfærden svarer til valg af det, som maksimerer den forventede nytte.

9.2.6. I det foregående har vi for at holde fremstillingen på et rimeligt simpelt plan forudsat, at der kun var endelig mange mulige gevinster. Analysen kan uden større vanskeligheder udvides til situationer, hvor der er uendelig mange, således som det var tilfældet i afsnit 9.1, idet vi her som "gevinster" har alle mulige godebundter (i gammeldags forstand, hvor usikkerhed ikke er indfortolket). Hvis en forbruger kender sandsynlighederne $\pi_1, \ldots, \pi_E$ for hver af de mulige elementarhændelser (og opfylder forventet-nytte hypotesen), kan hans nytte af en forbrugsplan

$$x = (x_1, \ldots, x_E)$$

hvor for $e = 1, \ldots, E$ vektoren x_e specificerer det godebundt, der forbruges hvis hændelse e indtræffer, skrives som

$$\sum_{e=1}^{E} \pi_e u(x_e),$$

hvor u er en nyttefunktion på ("sikre") godebundter. Hvis vi specielt ser på den simplificerede situation, hvor der kun er én vare, som f.eks. kan være en gevinst målt i kroner, kan nyttefunktionen se ud som vist i Figur 9.3. Hvis vi her skal finde nytten af et lotteri, der giver gevinsten x_1 kroner med sandsynligheden $\pi_1 = 1/2$ og gevinsten x_2 med sandsynligheden $1/2$, får vi den forventede nytte

$$\frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2)$$

svarende til nytteniveauet U' i Figur 9.3. Dette nytteniveau kan vi så sammenligne med nytten af middelværdien $(x_1 + x_2)/2$, svarende til x' i Figur 9.3. Det ses, at i det afbildede tilfælde er nytten af denne middelværdi $U(x')$, der kan ses som nytten af det sikre resultat svarende til lotteriets middelværdi, større end nytten af det oprindelige lotteri; vi siger, at vor beslutningstager udviser *risiko-aversion* – han foretrækker et sikkert beløb frem for et lotteri med den samme middelværdi.

Det er let at se, at risiko-aversion geometrisk svarer til, at funktionen u er konkav. Det kan man selvfølgelig ikke på forhånd vide; beslutningstagere kan være risiko-averse, men de kan eventuelt også være risiko-neutrale (hvilket svarer til, at grafen for u bliver en ret linje), de kan være risiko-elskere, som nyder spændingen ved lotteriet (u bliver da konveks), og de kan være både det ene og det andet, afhængigt af, hvor store gevinster det drejer sig om.

9.3. Usikkerhed og information; principal-agent modellen

9.3.1. Lad os med vort hjælpemiddel fra forrige afsnit se lidt nærmere på en simpel situation med adfærd under usikkerhed.

Antag, at der er to individer, som vi uden krav på originalitet vil kalde Robinson og Fredag, der skal indgå en kontrakt. Fredag yder en vis indsats a i Robinsons firma, men resultatet af indsatsen er underkastet usikkerhed. Vi vil for simpelheds skyld antage, dels at Fredag vælger sin indsats a fra en mængde A af r forskellige indsatser (f.eks. sløv, langsom, adstadig, middelmådig, almindelig, kvik osv.), og at der kun er k mulige endelige udfald $y_1, \ldots, y_k$ i firmaet. Karakteren af Fredags indsats påvirker sandsynligheden for disse udfald, dvs. resultatet af indsats a er en sandsynlighedsfordeling $\pi(a) = (\pi_1(a), \ldots, \pi_k(a))$, hvor $\pi_j(a)$ er sandsynligheden for, at det bliver y_j. Resultaterne y_j antages målt i kroner.

Robinsons betaling til Fredag for hans indsats kan ikke umiddelbart knyttes til indsatsen a, for vi vil antage, at Robinson ikke kan observere den; han ser kun det færdige resultat y_j, og det er jo underkastet tilfældighedernes spil. Betalingen kan kun afhænge af, hvad der kan observeres af begge parter, og følgelig må kontrakten specificere et beløb t_j, som Fredag skal have ved udfaldet y_j, $j = 1, \ldots, k$.

9.3.2. Hvorledes skal en sådan kontrakt udformes? Som et første bud vil vi se på en kontrakt, der opfylder det rimelige krav, at resultatet for Robinson er bedst muligt, givet at Fredag skal stilles så godt, at han ikke vil foretrække at pendle over til fastlandet og arbejde i nikkel-minerne. Det svarer til, at vi betragter en Pareto-optimal situation (under usikkerhed). Vi vil udstyre Robinson med den simple nyttefunktion

$$U(\pi, t) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j u(y_j - t_j)$$

og Fredag med funktionen

$$V(\pi,t,a)=\sum_{j=1}^{k}\pi_j(v(t_j)-w(a)).$$

Vi har altså, at begge opfylder forventet-nytte hypotesen; Robinson interesserer sig kun for sit nettoresultat, og Fredag har en negativ nytte af sin arbejdsindsats; som sædvanlig i vore modeller er arbejde noget, der gør ondt.

Den samlede situation, specificeret ved kontrakt $t=(t_1,\dots,t_k)$ og indsats a, er optimal i den ovenfor beskrevne forstand, hvis den maksimerer $U(\pi,t)$ under bibetingelsen

$$V(\pi(a),t,a)=\sum_{j=1}^{k}\pi_j(a)(v(t_j)-w(a))=0,$$

hvor vi for simpelheds skyld har normeret Fredags nyttefunktion sådan, at hans maksimale forventede nytte i alternativ beskæftigelse er 0. Hvis (t^0,a^0) er optimal, må den derfor maksimere Lagrange-funktionen

$$U(\pi,t)+\lambda V(\pi(a),t,a)$$

over alle t (og a). Vi antager, at $\pi(a^0)$ er i det indre af Π (så at $\pi_j(a^0)>0$ for alle j) og får ved at differentiere med hensyn til $t_1,\dots,t_k$, at

$$(*)\qquad -u'(y_j-t_j^0)+\lambda v'(t_j^0)=0$$

for $j=1,\dots,k$, eller

$$\frac{u'(y_i-t_i^0)}{u'(y_j-t_j^0)}=\frac{v'(t_i^0)}{v'(t_j^0)}$$

for alle $i,j=1,\dots,k$, $i\neq j$. Fortolkningen, som ikke skulle overraske i lyset af de tidligere kapitler, er, at det marginale substitutionsforhold ved flytning af en krones aflønning fra hændelse i til hændelse j er ens for begge individer.

Til senere brug vil vi lige notere os, at i det specielle tilfælde, hvor Robinson er risiko-neutral, således at $U(\pi,t)$ tager formen

$$U(\pi,t)=\sum_{j=1}^{k}\pi_j(y_j-t_j),$$

kan (*) skrives som

$$\frac{1}{v'(t_j^0)}=\lambda,\ j=1,\dots,k.$$

9.3.3. Inden vi fordyber os i studiet af Pareto-optimale situationer som den ovenfor, er det værd at bemærke, at der i vort problem er indbygget noget, som faktisk forhindrer dette Pareto-optimum i at blive realiseret!

Faktisk har vi allerede været inde på det, da vi antog at indsatsen a *kun kunne observeres af* Fredag. Typisk vil Robinson, som kun ser det endelige resultat, ikke kunne regne baglæns og fastslå Fredags faktiske indsats. Følgelig har Fredag *ikke noget incitament* til at slide i det.

Konsekvensen af dette er, at når Fredag handler rationelt, vil han vælge a så at hans egen (forventede) nytte maksimeres givet kontrakten $t = (t_1, \ldots, t_k)$, altså således at

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j(a)(v(t_j) - w(a))$$

er maksimal. Det vil normalt være et andet a end det, der maksimerer Robinsons nytte som i 9.3.2.

9.3.4. Vi må som følge af denne observation droppe ideen om Pareto-optimal kontrakt og indsats. I stedet vil det være rimeligt at interessere sig for kontrakter, som er optimale for Robinson givet Fredags nyttemaksimerende valg af a. Da begge individer nu er blevet moderne nyttemaksimerende beslutningstagere, vil vi i stedet kalde dem henholdsvis Principalen og Agenten. Modellen i det følgende går under betegnelsen *principal-agent modellen.*

Lad t være en kontrakt, der maksimerer principalens forventede nytte, givet at agenten vælger indsats således, at hans forventede nytte (givet t) maksimeres. Vi kan forestille os, at principalen har fundet frem til t ved en totrinsprocedure: Først har han for enhver indsats a hos Fredag undersøgt, hvor stort et (forventet) beløb $C(a)$ han må af med for at få Fredag til at vælge dette a; dernæst vælger han så det a^* med tilhørende $C(a^*)$ og $t(a^*)$, som giver ham selv det bedste resultat. For at denne procedure skal give rigtigt resultat, må vi forudsætte, at principalen er risiko-neutral (han ser ingen forskel på et vist beløb som sikker gevinst eller som middelværdi af et lotteri), så det gør vi.

9.3.5. Lad os se lidt nærmere på første trin, dvs. løsning af

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{k} \pi_j(a)t_j$$

over alle kontrakter $t = (t_1, \ldots, t_k)$ således at

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j(a)(v(t_j) - w(a)) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j(a)(v(t_j) - w(a)) \geq \sum_{j=1}^{k} \pi_j(a')(v(t_j) - w(a')), \text{ alle } a'.$$

Her er første bibetingelse den samme som i 9.3.2 (agenten skal have mindst hvad han kan få hos alternative principaler), mens den anden bibetingelse er *incitamentforeneligheden:* Agentens forventede nytte af den indsats a, som principalen vil have ham til at yde, skal være mindst lige så stor som den forventede nytte af en vilkårlig anden indsats.

Lad $K(a)$ være mængden af de indsatser a', for hvilke denne bibetingelse er opfyldt med lighedstegn. Hvis t^* løser problemet ovenfor, får vi ved at differentiere Lagrangefunktionen mht. $t_1, \dots, t_k$, at

$$\pi_j(a) + \lambda v'(t_j^*)\pi_j(a) + \sum_{a' \in K(a)} \mu(a')v'(t_j^*)(\pi_j(a) - \pi_j(a')) = 0$$

eller

$$\frac{1}{v'(t_j^*)} = -\lambda - \sum_{a' \in K(a)} \frac{\pi_j(a) - \pi_j(a')}{\pi_j(a)}$$

for $j = 1, \dots, k$, hvor λ og $\mu(a')$ er Lagrange-multiplikatorer.

Det væsentlige ved det sidste udtryk er, at det giver os afvigelsen fra Pareto-optimalitet, nemlig andet led på højre side, som er en vejet sum af relativ ændring af sandsynlighed for udfald j ved skift af indsats fra a til a', som er lige så god for agenten men ikke nødvendigvis for principalen. Det er altså en slags udtryk for omkostningerne ved at have incitamentforenelige kontrakter.

9.3.6. At den optimale kontrakt i principal-agent modellen ikke giver en Pareto-optimal situation, kan ikke overraske, for de særlige omstændigheder omkring principalens manglende information forhindrer dette. Det er derimod interessant, at man kan vurdere, hvad der går galt, og således tilpasse kontrakterne bedst muligt.

Et praktisk eksempel på anvendelse af overvejelserne i det foregående kan hentes fra *skadesforsikring.* Hvis den forsikrede selv kan påvirke sandsynligheden for at skaden indtræffer – noget som ikke er så ualmindeligt, f.eks. ved bilforsikringer – kan forsikringskontrakter ikke uden videre analyseres med metoderne fra afsnit 9.1. Denne situation kaldes i branchen for *moral hazard,* og principal-agent modellen er faktisk nærmest skræddersyet til sådanne problemer. Her er principalen forsikringsselskabet, agenten er den forsikrede, og kontrakten specificerer forsikringstagerens *selvrisiko* (eller helt præcist: forsikringssum minus selvrisiko). Modellen giver således forskrifter for, hvorledes selskabet skal tilrettelægge sine forsikringsordninger for at opnå den størst mulige (forventede) profit.

9.4. Noter

9.4.1. Betingede varer blev indført af Arrow og Debreu. Fremstillingen i afsnit 9.1 følger Debreu (1959). Forventet nytte har været anvendt i flere århundreder, men det præcise grundlag for anvendelsen deraf blev først afklaret i von Neumann og Morgenstern (1944). Man bruger ofte udtrykket “von Neumann-Morgenstern nytte” om en nyttefunktion af den type, som vi udledte i afsnit 9.2.

9.4.2. Principal-agent modellen blev første gang diskuteret i Ross (1973). For en mere detaljeret introduktion til emnet end fremstillingen i afsnit 9.3 kan give, se Laffont (1987) eller Hirshleifer og Riley (1993).

9.5. Opgaver

9.5.1. En forbruger har nyttefunktionen $u(x) = \log x$ defineret på alle positive tal x (fortolket som størrelsen af indkomsten i perioden).

Forbrugeren er udsat for et tab på 100.000 kr., og sandsynligheden for, at dette tab sker, er 0,1%. Hvad er det maksimale, som et forsikringsselskab kan kræve af denne forbruger for en forsikring, der refunderer tabet, hvis det sker.

Det viser sig nu, at forbrugeren mod en udgift på 1 kr. i hver periode kan halvere sin risiko til 0.05%. Forsikringsselskabet kan imidlertid ikke observere, om den forsikrede har gjort det eller ej, og da det koster penge for den sikrede, vil han ikke umiddelbart ønske at gøre det. Hvad kan selskabet gøre for at få den sikrede til at reducere sin risiko?

9.5.2. Vis Arrows klassiske resultat om (syge-)forsikring: Hvis den forsikrede er risikoavers og forsikringsselskabet er risikoneutralt, da vil en Pareto-optimal forsikringskontrakt være en, hvor selskabet erstatter den forsikredes tab fuldt ud, eventuelt med et konstant fradrag.

9.5.3. Betragt en principal-agent model, hvor der kun er to mulige udfald for principalen, nemlig $b_2 > b_1$, to niveauer af indsats for agenten, nemlig H og L. Lad w_2 og w_1 være aflønningen til agenten, når udfaldet er henholdsvis b_2 og b_1, og lad $\pi(e)$ være sandsynligheden for hver af disse udfald, hvor $e \in \{H, L\}$ (så $\pi(H) > \pi(L)$).

(a) Indtegn indifferenskurver for agenten i et (w_1, w_2)-diagram for hvert valg af e.

(b) Forklar, at indifferenskurven for L har større numerisk hældning end indifferenskurven for H i ethvert punkt.

(c) Forklar, at agenten vælger indsats L overalt på diagrammets 45°-linje.

(d) Brug de foregående punkter til at finde de områder, hvor agenten vælger henholdsvis L og H.

APPENDIKS

Visse matematiske begreber og resultater anvendt i mikroteorien

1. Det l-dimensionale euklidiske rum $\mathbb{R}^l$ består af alle vektorer $(x_1, \ldots, x_l)$ med l koordinater, hvor $x_h \in \mathbb{R}$ for $h = 1, \ldots, l$.

På $\mathbb{R}^l$ er defineret en *norm* $\|\cdot\|$ ved

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_l^2}.$$

Herfra kan vi definere *den åbne kugle* med centrum x og radius $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^l \mid \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

En mængde $G \subset \mathbb{R}^l$ siges at være *åben,* hvis der for ethvert $x \in G$ findes et $\varepsilon > 0$ så $B_\varepsilon(x) \subset G$.

2. En *følge* af elementer fra $\mathbb{R}^l$ defineres som en afbildning fra de naturlige tal $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ til $\mathbb{R}^l$ og skrives $(x_1, x_2, \ldots)$ eller (x_n). Følgen (x_n) siges at *konvergere* mod $x \in \mathbb{R}^l$ hvis dens elementer nærmer sig mere og mere til x, når n vokser, præcist hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \text{ så } n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Hvis en følge konvergerer mod x siges den at være konvergent. x kaldes følgens grænseværdi eller blot grænse.

Eksempler: Følgen af reelle tal

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$

konvergerer mod 0. Følgen $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ er ikke konvergent.

3. Lad (x_n) være en følge af elementer fra $\mathbb{R}^l$. Hvis vi blot betragter nogle af følgens elementer, f.eks. $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ (men stadigvæk uendelig mange af dem), får vi en *delfølge* af den oprindelige. Der gælder oplagt, at hvis den oprindelige følge var konvergent, da er enhver delfølge konvergent med samme grænseværdi.

4. En delmængde F af $\mathbb{R}^l$ kaldes *afsluttet,* hvis F's komplement $CF = \{x \in \mathbb{R}^l \mid x \notin F\}$ er åben. Der gælder

SÆTNING. *F er afsluttet hvis og kun hvis enhver konvergent følge (x_n) med elementer fra F har sin grænse i F.*

BEVIS: “hvis”: Antag at F’s komplement CF ikke var åben. Så måtte der være et element $x \in CF$, så at enhver åben kugle med centrum i x og radius $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) indeholdt et element x_n fra F. Følgen (x_n) har elementer fra F og er valgt, så den konvergerer mod x. Altså er $x \in F$ i strid med antagelsen.

“Kun hvis”: Hvis F er afsluttet, vil der til ethvert element $x \in CF$ være en åben kugle, som ikke rører F. Men så kan der ikke være nogen følge fra F, der går mod $x \in CF$. Hvis følgen er konvergent, må grænsen altså ligge i F. □

5. Lad $F_1, \ldots, F_k$ være afsluttede mængder. Ved brug af definitionerne og sætningen ovenfor ses let, at $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$ og $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ er afsluttede. Tilsvarende gælder der, hvis $G_1, \ldots, G_k$ er åbne mængder, at fælles- og foreningsmængde igen er åbne.

Den tomme mængde $\emptyset$ er afsluttet, idet komplementet er $\mathbb{R}^l$, som er åben. $\emptyset$ er i øvrigt også åben.

6. Lad $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ være en afbildning. f siges at være *kontinuert i punktet* x, hvis

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \; \|x^1 - x\| < \delta \Rightarrow \|f(x^1) - f(x)\| < \varepsilon.$$

En anden karakterisering af kontinuitet er følgende:

SÆTNING. *f er kontinuert i x hvis og kun hvis der for enhver følge (x_n), som konvergerer mod x, gælder, at følgen af billeder $(f(x_n))$ er konvergent med grænse $f(x)$.*

BEVIS: “hvis”: Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Hvis der ikke fandtes et δ, så (*) var opfyldt, kunne vi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ vælge et x_n, så $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$, men $\|f(x_n) - f(x)\| \geq \varepsilon$. Følgen $(f(x_n))$ konvergerer da ikke mod $f(x)$, en modstrid.

“Kun hvis”: Lad (x_n) være en følge som konvergerer mod x, og $\varepsilon > 0$ vilkårlig. Ifølge (*) findes der et δ så $\|f(x_n) - f(x)\| < \varepsilon$, når blot $\|x_n - x\| < \delta$. Men da (x_n) går mod x kan vi vælge $N \in \mathbb{N}$ så at $\|x_n - x\| < \delta$, når blot $n > N$. Men så er også $\|f(x_n) - f(x)\| < \varepsilon$, når $n > N$, så $(f(x_n))$ konvergerer mod $f(x)$. □

Hvis $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ er kontinuert i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}^l$, siges f at være *kontinuert.*

7. Lad $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ være en funktion. For en mængde $M \subset \mathbb{R}^k$ kaldes mængden $f^{-1}(M) = \{x \in \mathbb{R}^l \mid f(x) \in M\}$ *originalmængden* til (eller urbilledet af) M. Der gælder

SÆTNING. *En funktion $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ er kontinuert, hvis og kun hvis originalmængden til enhver afsluttet mængde er afsluttet.*

BEVIS: “hvis”: Antag $f^{-1}(F)$ afsluttet for enhver afsluttet mængde F i $\mathbb{R}^k$. Lad $x \in \mathbb{R}^l$ og $\varepsilon > 0$ være vilkårlige. Mængden $\{y \in \mathbb{R}^k \mid \|y - f(x)\| < \varepsilon\}$ er åben, dens komplement F altså afsluttet. Antag nu, at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ var $x_n \in \mathbb{R}^l$ med $\|x_n - x\| < 1/n$, men $\|f(x_n) - f(x)\| \geq \varepsilon$, dvs. $f(x_n) \in F$. Vi havde da en følge (x_n) fra $f^{-1}(F)$, som konvergerede til x. Altså måtte $x \in f^{-1}(F)$, en modstrid. Følgelig er f kontinuert i x, som var vilkårligt valgt.

"Kun hvis": Lad f være kontinuert og F en vilkårlig afsluttet mængde i $\mathbb{R}^k$. Vi skal vise, at $f^{-1}(F)$ er afsluttet. Betragt hertil en følge (x_n) af elementer fra $f^{-1}(F)$, som konvergerer mod $x \in \mathbb{R}^l$. Følgen $(f(x_n))$ er da konvergent med grænse $f(x)$. Da $f(x_n) \in F$, som er afsluttet, må $f(x) \in F$, altså $x \in f^{-1}(F)$.$\square$

8. I $\mathbb{R}^l$ kan vi definere en (partiel) ordning $\geq$ ved

$$x \geq y \Leftrightarrow x_h \geq y_h,\ h = 1, \ldots, l.$$

En delmængde B af $\mathbb{R}^l$ siges at være *opad begrænset,* hvis der findes et $a \in \mathbb{R}^l$ således at $a \geq x$ for alle $x \in B$. Tilsvarende siges B at være *nedad begrænset,* hvis der findes $c \in \mathbb{R}^l$ så $x \geq c$ for alle $x \in B$.

B kaldes *begrænset*, hvis der findes et $K > 0$ så $\|x\| < K$ for all $x \in B$. Det indses let (prøv!), at B er begrænset, hvis og kun hvis B er både opad og nedad begrænset.

9. En delmængde K af $\mathbb{R}^l$ kaldes *kompakt,* hvis den er afsluttet og begrænset. Om kompakte mængder gælder den vigtige

SÆTNING. *Enhver følge (x_n) af elementer fra K har en konvergent delfølge.*

Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion defineret på en delmængde A af $\mathbb{R}^l$. Vi siger, at f antager sit maksimum i punktet $a \in A$, hvis der gælder, at $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in A$.

Det er på forhånd ikke sikkert, at der findes et sådant punkt a (eksempel: $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$). Der gælder imidlertid følgende

SÆTNING (Weierstrass): *Enhver kontinuert funktion $f : K \to \mathbb{R}$ defineret på en ikke-tom kompakt delmængde K af $\mathbb{R}^l$ antager sit maksimum i et punkt $x^0 \in K$.*

BEVIS: Lad $M = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ være det mindste tal, som er $\geq$ alle f's værdier på K. Hvis $M = +\infty$, må der til ethvert $n \in \mathbb{N}$ være et x_n med $f(x_n) > n$. Følgen (x_n) har en delfølge, som konvergerer mod et $x^* \in K$, og da f er kontinuert, må den tilsvarende delfølge af billeder konvergerer mod $f(x^*)$, i strid med at den vokser over alle grænser.

Altså er $M < +\infty$. Vælg da x_n så $\|f(x_n) - M\| < 1/n$. Følgen (x_n) har en delfølge, som konvergerer mod et $x^0 \in K$, og den tilsvarende følge af billeder konvergerer mod $f(x^0)$. Men vi ved allerede, at følgen af billeder konvergerer mod M, altså er $f(x^0) = M$. $\square$

Bemærkning: Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$ antager også sit minimum i et punkt $x^1 \in K$ (hvorfor?).

10. En delmængde C af $\mathbb{R}^l$ kaldes *konveks,* hvis det for vilkårlige $x, y \in C$ og $\lambda \in [0, 1]$ gælder, at $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Geometrisk betyder dette, at linjestykket mellem vilkårlige to punkter fra C er helt indeholdt i C.

For en mængde $A \subset \mathbb{R}^l$ kan vi definere

$$\operatorname{cl} A = \{x \in \mathbb{R}^l \mid \forall \varepsilon > 0: \; B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\} \text{ (A's afslutning)}$$
$$\operatorname{int} A = \{x \in \mathbb{R}^l \mid \exists \varepsilon > 0: \; B_\varepsilon(x) \subset A\} \text{ (A's indre)}$$

Det er let at vise (prøv!), at

(1) $\operatorname{cl} A$ er afsluttet, $\operatorname{int} A$ er åben, og $\operatorname{int} A \subset A \subset \operatorname{cl} A$,

(2) hvis $C \subset \mathbb{R}^l$ er konveks, da er også $\operatorname{cl} C$ og $\operatorname{int} C$ konvekse mængder.

11. SÆTNING: *Lad $C \subset \mathbb{R}^l$ være en ikke-tom, afsluttet og konveks mængde, og antag $z \notin C$. Da findes der $p \in \mathbb{R}^l$, $p \neq 0$, således at $p \cdot z < p \cdot x$ for alle $x \in C$.*

BEVIS: Lad $x^0 \in C$ være vilkårlig. Mængden

$$K = \{x \in C \mid \|x - z\| \leq \|x^0 - z\|\}$$

er kompakt, og $\|x - z\|$ er kontinuert som funktion af x. Ifølge Weierstrass' sætning findes der derfor et $\bar{x} \in C$, således at $\|\bar{x} - z\| = \min_{x \in K} \|x - z\|$.

Sæt $p = \bar{x} - z \neq 0$ og $p \cdot \bar{x} = \alpha$. Af

$$0 < \|\bar{x} - z\|^2 = (\bar{x} - z) \cdot (\bar{x} - z) = p \cdot \bar{x} - p \cdot z$$

fås, at $p \cdot z < \alpha$.Vi viser, at $p \cdot x \geq \alpha$ for alle $x \in C$. Antag nemlig, at der fandtes $x \in C$ med $p \cdot x < \alpha$. Sæt $x^\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}$ for $\lambda \in [0, 1]$. Vi har da

$$\begin{aligned}
\|\bar{x} - z\|^2 - \|x^\lambda - z\|^2 &= \sum_{h=1}^{l} (\bar{x}_h - z_h)^2 - \sum_{h=1}^{l} (x_h^\lambda - z_h)^2 \\
&= \sum_{h=1}^{l} (\bar{x}_h - z_h)^2 - \sum_{h=1}^{l} (\lambda x_h - \lambda \bar{x}_h + \bar{x}_h - z_h)^2 \\
&= -\lambda^2 \sum_{h=1}^{l} (x_h - \bar{x}_h)^2 - 2\lambda \sum_{h=1}^{l} (x_h - \bar{x}_h)(\bar{x}_h - z_h) \\
&= \lambda(-\lambda \|x - \bar{x}\|^2 - 2p \cdot (x - \bar{x})).
\end{aligned}$$

Vi har $p \cdot (\bar{x} - x) > 0$, så hele udtrykket er positivt, når blot $0 < \lambda < 2p \cdot (\bar{x} - x)/\|x - \bar{x}\|^2$. Men $x^\lambda \in C$, så det giver en modstrid med definitionen af $\bar{x}$. $\square$

12. Den foregående sætning er et eksempel på en såkaldt separationssætning. Geometrisk siger den, at hvis der er givet en afsluttet, konveks mængde C og et punkt z uden for mængden, kan vi finde et hyperplan, således at C og z ligger på hver sin side. Vi skal benytte en anden separationssætning, nemlig følgende

SÆTNING (Minkowski): *Lad $C \subset \mathbb{R}^l$ være en konveks mængde, og antag at $N \cap C = \emptyset$, hvor $N = \{x \in \mathbb{R}^l \mid x_h < 0,\ h = 1, \ldots, l\}$. Da findes der $p \in \mathbb{R}^l$, $p \neq 0$, så $p \cdot x \geq 0$ for alle $x \in C$.*

BEVIS: Vælg en følge (z_n) således at $z_n \in N$ og $z_n \to 0$ (f.eks. $z_n = -(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$). For hvert n findes ifølge sætning 11 $p_n \in \mathbb{R}^l$, $p_n \neq 0$, således at $p_n \cdot z_n < p_n \cdot x$ for alle $x \in \operatorname{cl} C$.

Betragt nu følgen $(\bar{p}_n)$, hvor $\bar{p}_n = p_n / \|p_n\|$. Følgens elementer ligger alle i den kompakte mængde S bestående af alle vektorer med norm 1. Altså er der en delfølge $(\bar{p}_{n_t})$, der konvergerer mod en vektor $\bar{p} \in S$. Da $\|\bar{p}\| = 1$, er $\bar{p} \neq 0$. Lad $x \in C$ være vilkårlig. For alle t har vi, at

$$\bar{p}_{n_t} \cdot z_{n_t} < \bar{p}_{n_t} \cdot x,$$

og i grænsen fås

$$0 = \bar{p} \cdot 0 \leq \bar{p} \cdot x.$$

Da $x \in C$ var vilkårlig, gælder der altså $\bar{p} \cdot x \geq 0$ for alle $x \in C$. □

13. Lad A være en $n \times n$ matrix med ikke-negative elementer, om hvilken der gælder, at der findes en vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ med $\bar{x}_h \geq 0$, $h = 1, \ldots, n$, så

$$\bar{x} > A\bar{x},$$

hvor relationen $>$ ($\geq$) mellem vektorer skal betyde $>$ ($\geq$) i hver koordinat. En sådan matrix kaldes ofte *produktiv.*

LEMMA: *Hvis $x' \in \mathbb{R}^n$ er således at $x' \geq Ax'$, da er $x' \geq 0$.*

BEVIS: For ethvert $x \in \mathbb{R}^n$ med $x \geq 0$ medfører $x > Ax$, at $x > 0$, idet der for h'te koordinat gælder

$$x_h > \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k \geq 0.$$

Antag nu, at x' har visse koordinater negative, og vælg λ mellem 0 og 1, således at vektoren $x'' = \lambda x' + (1 - \lambda)\bar{x}$ er ikke-negativ, og den mindste koordinat i x'' (lad os sige x''_1) er 0. Vi har da

$$x'' = \lambda x' + (1 - \lambda)\bar{x} > \lambda A x' + (1 - \lambda) A\bar{x} = A(\lambda x' + (1 - \lambda)\bar{x}),$$

hvoraf vi får at $x'' > 0$ i strid med at $x''_1 = 0$. □

KOROLLAR: *Matricen $I - A$ er regulær.*

BEVIS: Hvis $(I - A)x = 0$ eller $x = Ax$, er $x \geq 0$ iflg. lemmaet. Men hvis $(I - A)x = 0$, er også $(I - A)(-x) = 0$, så vi har også $-x \geq 0$, hvoraf $x = 0$.

Ligningen $(I - A)x = 0$ har således kun nulløsningen, og det vil netop sige, at $(I - A)$ er regulær. $\square$

SÆTNING: *Hvis A er produktiv, har $I - A$ en invers med ikke-negative elementer.*

BEVIS: Vi har netop set (korollaret), at $I - A$ har en invers. Det (h, k)'te element i denne kan findes som h'te koordinat i vektoren $(I - A)^{-1}e_k$, hvor e_k er k'te enhedsvektor (1 på k'te plads, nul på resten). Men denne vektor er løsning til ligningen

$$(I - A)x = e_k \text{ eller } x = Ax + e_k,$$

hvoraf $x \geq Ax$ og følgelig (lemmaet) $x \geq 0$. $\square$

14. Vi kan sammenfatte resultaterne ovenfor i følgende:

SÆTNING: *Lad B være en $n \times n$ matrix, således at*

(i) diagonalelementerne b_{hh} er positive og ≤ 1,

(ii) de øvrige elementer b_{hk} er ikke-positive, dvs. $b_{hk} \leq 0$, $h \neq k$,

(iii) der findes ikke-negative tal $p_1, \ldots, p_n$, således at der for hver række h i matricen gælder

$$p_h b_{hh} > \sum_{k \neq h} p_k |b_{hk}|.$$

Da har B en invers med ikke-negative elementer.

BEVIS: Matricen $I - B$ er produktiv. $\square$

15. *Noter:* Den matematik, som er gennemgået i det foregående, kan findes i talrige lærebøger, f.eks. Rudin (1953).

En læseværdig gennemgang af den matematik, der bruges i ligevægtsteorien, findes i Nikaido (1968).

EKSAMENSLIGNENDE OPGAVER I MIKROØKONOMI.[1]

OPGAVE 1

En forbruger har præferencer, som kan beskrives ved nyttefunktionen

$$S(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \tfrac{1}{2} x_2$$

hvor $x_1, x_2 \geq 0$ angiver hans forbrug af vare 1 og 2. Forbrugerens forbrugsmulighedsområde er $X = \mathbb{R}_+^2$.

A. Tegn forbrugerens indifferenskurver for nytten S = 4 og S = 6. Antag at varepriserne er givet ved $p_1 = ½$ og $p_2 = 1$. Bestem ved hjælp af forbrugerens indifferenskort og algebraisk forbrugerens optimale forbrug, hvis han har indkomsten R = 6 hhv. R = 10. Sammenlign forbrugerens nyttemaksimerende forbrug i de to tilfælde og kommentér.

B. Udled algebraisk det generelle udtryk for forbrugerens efterspørgsel (efterspørgselsfunktionen) for vilkårlige varepriser $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$ og vilkårlig indkomst R, hvor

$$R \geq \frac{p_2^2}{p_1} .$$

Forklar den anførte restriktion på R.

Betragt en økonomi med 2 forbrugere og 2 varer. Forbruger 1 har forbrugsmulighedsområde og nyttefunktion som forbrugeren ovenfor. Forbruger 2 har forbrugsmulighedsområdet $X_2 = \mathbb{R}_+^2$ og nyttefunktionen

$$S_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Økonomiens initialbeholdning er givet ved ω = (10,8). Tilstanden (allokationen) x er givet ved x = ((4,5),(6,3)).

C. Tegn en Edgeworth-boks for økonomien og angiv tilstand x i boksen. Illustrér for begge forbrugere den indifferenskurve, som giver forbrugeren samme nytte, som han opnår ved sit

[1] Opgaverne er hentet fra eksamenssæt i faget ØKO 1 på 1.år af MØK-studiet ved Handelshøjskolen i København.

forbrug i tilstand x. Redegør på grundlag af figuren for, at tilstand x er en markedsligevægt i økonomien.

D. Vis algebraisk, at tilstanden x = ((4,5),(6,3)) er en markedsligevægt i økonomien og bestem priser og indkomster, så tilstanden fremkommer som markedsligevægt. Er tilstanden fair?

Antag at økonomiens initialbeholdning ω = (10,8) er fordelt, således at forbruger 1 har initialbundtet ω_1 = (2,3) og forbruger 2 har initialbundtet ω_2 = (8,5).

E. Bestem en Walras-ligevægt for økonomien. Angiv og beskriv det varebytte, der i ligevægten foregår mellem de to forbrugere. Er tilstanden hørende til Walras-ligevægten Pareto-optimal?

OPGAVE 2

Betragt en 2-vare forbrugsøkonomi med 2 forbrugere, forbruger 1 og 2. Forbruger 1 har præferencer, som kan beskrives ved nyttefunktionen

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}(x_{12} + 1)$$

hvor x_{11} og x_{12} angiver forbruger 1´s forbrug af vare 1 og vare 2. Forbrugerens forbrugsmulighedsområde er X = $\mathbb{R}_+^2$ og hans initialbeholdning er ω_1 = (2,9).

Forbruger 2 har nyttefunktion

$$S_2(x_{21}, x_{22}) = (x_{21} + 1)x_{22},$$

hvor x_{21} og x_{22} angiver forbruger 2´s forbrug af vare 1 og 2, og initialbeholdning ω_2 = (8,1).

A. Opstil og løs forbrugerens problem (FP) for forbruger 1 og 2 som funktion af vareprisern
e $p_1 > 0$ og $p_2 > 0$ og forbrugernes respektive indkomster R_1 og R_2 givet som værdien af deres initialbeholdninger.

B. Bestem en Walras-ligevægt i økonomien. Indtegn økonomiens initialtilstand givet ved forbrugernes initialtildelinger samt Walras-ligevægten i en Edgeworth-box. Er ligevægtstilstanden fair?

C. Bestem mængden af Pareto-Optimale tilstande i økonomien og indtegn i Edgeworth-boxen. Er tilstanden hørende til Walras-ligevægten Pareto-Optimal?

OPGAVE 3

Betragt en økonomi $\mathcal{E}$ = ((X,S,ω), Y) med 1 forbruger, 1 producent og 2 varer, vare 1 og vare 2. Forbrugeren kan beskrives ved

$$X = \mathbb{R}_+^2\ ,\ S(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1 x_2\ ,\ \omega = (12, 0)$$

og producenten kan beskrives ved

$$Y = \left\{ (y_1, y_2) \in R^2 \,\middle|\, y_2 \le 2\sqrt{(-y_1)}, y_1 \le 0 \right\}.$$

A. Beskriv økonomien med ord. Tegn virksomhedens produktionsmuligheder Y i en figur. Tegn endvidere økonomiens (forbrugerens) forbrugsmuligheder i et (x_1, x_2) -diagram. Indtegn i denne figur indifferenskurver for forbrugeren svarende til nytten S = 5, S = 10 og S = 16. Angiv på figuren økonomiens Pareto-Optimale tilstand.

B. Bestem økonomiens Pareto-Optimale tilstand algebraisk. Overvej om den Pareto-Optimale tilstand kan fås som markedsligevægt og bestem i givet fald en markedsligevægt, hvori den Pareto-Optimale tilstand indgår. Tjek dit bud på en sådan markedsligevægt.

OPGAVE 4

Betragt en økonomi med to forbrugere og to varer. Forbruger 1 har nyttefunktionen

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = \ln(x_{11}) + x_{12}$$

hvor $x_{11} > 0$, $x_{12} \ge 0$ er forbruger 1´s forbrug af vare 1 hhv. vare 2. Forbruger 1 har initialbeholdningen ω_1 = (4,6) af de to varer. Forbruger 2 har nyttefunktionen

$$S_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + 2\sqrt{x_{22}}\ ,$$

hvor $x_{21} \ge 0, x_{22} \ge 0$ er forbruger 2´s forbrug af vare 1 hhv. vare 2. Forbruger 2´s initialbeholdning af de to varer er ω_2 = (6,4).

A. Tegn i en figur indifferenskurver for forbruger 2 svarende til nytten 6 og nytten 8. Opstil for begge forbrugere deres nyttemaksimeringsproblemer for priser p_1 = 4 og p_2 = 2 og bestem løsningen til disse problemer.

B. Udled for forbruger 1 og forbruger 2 det generelle udtryk for forbrugerens efterspørgsel som funktion af vilkårlige varepriser p_1, p_2 givet forbrugerens initialbeholdning (efterspørgsels-funktionen). Opstil ligevægtsbetingelser for de to varemarkeder og bestem en ligevægtspris for disse markeder. Angiv en Walras-ligevægt for økonomien. Er Walras-ligevægten fair?

C. Antag, at der ikke længere er privat ejendomsret i økonomien, men at økonomiens samlede initialbeholdning af de to varer fortsat er ω = (10,10). Er tilstanden ((½,6), (9½,4))

Pareto-Optimal? Bestem i bekræftende fald priser på varerne og indkomster til forbrugerne, så tilstanden ((½,6),(9½,4)) fremkommer som markedsligevægt. Angiv denne markedsligevægt.

OPGAVE 5

Betragt en økonomi med 3 varer, 2 forbrugere og 2 virksomheder.

Virksomhed 1 har produktionsmuligheder givet ved $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-y_1)}$, hvor $y_1 \leq 0$ er virksomhedens input af vare 1 og $y_2 \geq 0$ er virksomhedens output af vare 2. Virksomhed 2 har produktionsmuligheder givet ved $y_3 = 2\sqrt{(-y_1)}$, hvor $y_1 \leq 0$ er virksomhedens input af vare 1 og $y_3 \geq 0$ er virksomhedens output af vare 3.

Forbruger 1 og forbruger 2 har begge nyttefunktionen $S(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{4}}$, hvor $x_1 \geq 0$ angiver forbruget af vare 1, $x_2 \geq 0$ forbruget af vare 2 og $x_3 \geq 0$ forbruget af vare 3. Forbruger 1 har initialbeholdningen ω_1 = (1,0,0) og forbruger 2 har initialbeholdningen ω_2 = (2,0,0) af de tre varer. Forbruger 1 ejer (og får derfor den fulde profit fra) virksomhed 1 og forbruger 2 ejer virksomhed 2.

A. Opstil profitmaksimeringsproblemet for hver af virksomhederne. Bestem heraf virksomhedernes optimale produktioner som funktion af de givne varepriser (udbudsfunktionen) og virksomhedernes profit.

B. Angiv for hver af forbrugerne et udtryk for forbrugerens indkomst bestemt som værdien af hans initialbeholdning og hans profitindkomst. Opstil for hver forbruger hans nyttemaksimeringsproblem og bestem heraf hans optimale forbrug som funktion af de givne varepriser og hans indkomst (efterspørgselsfunktionen).

C. Opstil markedsligevægtsbetingelser for hver af de tre varer og bestem heraf et sæt ligevægtspriser. Angiv en (Walras-) ligevægt for økonomien ved disse priser.

OPGAVE 6

Betragt en økonomi med 2 varer, 1 forbruger og 1 virksomhed. Forbrugeren har nyttefunktionen $S(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, hvor $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ angiver hans forbrug af vare 1 hhv. vare 2. Forbrugeren har initialbeholdningen ω = (20, 0) og ejer virksomheden.

Virksomheden har produktionsmuligheder $y_2 = (-2y_1)^{\frac{1}{2}}$, hvor $y_1 \leq 0$ er input af vare 1 og $y_2 \geq 0$ er output af vare 2.

A. Illustrer virksomhedens produktionsmuligheder på en figur. Illustrer endvidere økonomiens (og dermed forbrugerens) forbrugsmuligheder i et (x_1, x_2)-diagram under hensyntagen til økonomiens initialbeholdning og produktionsmuligheder.

B. Angiv betingelser for (dvs. definer) en mulig/opnåelig tilstand i den betragtede økonomi. Definer endvidere en Pareto-Optimal tilstand i økonomien.

C. Bestem algebraisk en Pareto-optimal tilstand i økonomien. Angiv priser, således at den Pareto-optimale tilstand kan fås som markedsligevægt.

OPGAVE 7

Betragt en økonomi med to forbrugere $X_i, i = 1,2$ og en producent Y. I økonomien findes to goder; gode 1 som er en privat vare og gode 2 som er et offentligt gode.
Forbrugernes forbrugsmulighedsområder, nyttefunktioner og initialbundter er givet ved

$$X_1 = X_2 = R_+^2,\ S_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}\ ,\ S_2(x_1, x_2) = \min\left[x_1, x_2\right]$$

$\omega_1 = (6,0)$ $\omega_2 = (8,0)$,

og virksomhedens produktionsmuligheder er givet ved

$$Y = \left\{(y_1, y_2) \in R^2 \middle| y_2 \leq -2y_1, y_1 \leq 0\right\}$$

Endelig forudsættes, at forbruger 1 og 2 hver ejer halvdelen af virksomheden.

A. Angiv efterspørgselsfunktioner for forbruger 1 og 2 ved positive priser og indkomst.

B. Angiv producentens problem og find priser (p_1, p_2), som løser profitmaksimerings-problemet. Hvor stor er virksomhedens profit? Beregn forbrugernes indkomster ved de profitmaksimerende priser.

C. Find en Lindahl-ligevægt for økonomien.

OPGAVE 8

Betragt en økonomi med to varer, hvor vare 1 er arbejdskraft (fritid) og vare 2 er mad. Der findes i økonomien en forbruger med forbrugsmulighedsområdet $X = R_+^2$ og præferencer, der kan repræsenteres ved nyttefunktionen $S(x_1, x_2) = x_1 x_2$, hvor x_1 angiver forbruget af fritid og x_2 forbruget af mad. Forbrugerens initialbeholdning af arbejdskraft og mad er ω = (16,0).
Der er i økonomien desuden en virksomhed, der har produktionsmulighedsområdet

$$Y = \left\{(y_1, y_2) \in R^2 \middle| y_2 \leq 2\sqrt{\max\left[0, -(y_1 + 4)\right]}, y_1 \leq 0\right\}$$

hvor y_1 er arbejdskraftinputtet og y_2 er produktionen af mad.

A. Illustrér virksomhedens produktionsmuligheder grafisk. Illustrér i et (x_1, x_2) -diagram økonomiens forbrugsmuligheder samt nogle indifferenskurver for forbrugeren. Skitsér, hvorledes man finder økonomiens Pareto-optimale tilstand i diagrammet.

B. Bestem den Pareto-optimale tilstand algebraisk. Overvej, om den Pareto-optimale tilstand kan decentraliseres og find i bekræftende fald en markeds-ligevægt, hvori tilstanden indgår.

OPGAVE 9

Betragt en økonomi med to varer, vare 1 og vare 2, og to (typer af) forbrugere, forbruger 1 og forbruger 2. Forbruger 1 har præferencer for de to varer, som kan beskrives ved nyttefunktionen

$$S_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}x_{12}^2$$

hvor x_{11} er forbruger 1´s forbrug af vare 1 og x_{12} hans forbrug af vare 2. Forbruger 1´s initialbeholdning (endowment) af varerne er givet ved $\omega_1 = (3,9)$. Forbruger 2 har præferencer for de to varer, som kan beskrives ved nyttefunktionen

$$S_2(x_{21}, x_{22}) = 2x_{21}x_{22} ,$$

hvor x_{21} er forbruger 2´s forbrug af vare 1 og x_{22} hans forbrug af vare 2. Forbruger 2 har en initialbeholdning af varerne på $\omega_2 = (2,12)$.

A. Tegn for begge forbrugere i et (x_1, x_2)-diagram indifferenskurven for nytten 16. Angiv forbrugernes indkomster som funktion af varepriserne. Opstil for hver forbruger hans nyttemaksimeringsproblem (FP) og bestem forbrugernes nyttemaksimerende forbrug (efterspørgsel) som funktion af varepriserne.

B. Opstil betingelser for ligevægt på de to varemarkeder og vis, at prisen $(p_1, p_2) = (1, \frac{1}{3})$ er en ligevægtspris. Bestem Walras-ligevægtstilstanden ved denne pris. Er Walras-ligevægten Pareto-Optimal? Er Walras-ligevægten fair?

C. Skitsér en Edgeworth-box for økonomien og angiv heri økonomiens initialtilstand givet ved forbrugernes initialbeholdninger samt Walras-ligevægten. Sammenlign de to tilstande.

OPGAVE 10

En forbruger har nyttefunktionen $S(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$, hvor $x_1, x_2 > 0$ og indkomsten $m > 0$ **.** Lad p_1 være prisen på den første vare og lad p_2 være prisen på den anden vare.

A. Opstil forbrugerens problem og vis at

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{p_2}{p_1} \text{ og } x_2(p_1, p_{2.}, m) = \frac{m}{p_2} - 1$$

er løsningen til forbrugerens problem, hvis $m > p_2$.

Der antages nu at være to forbrugere, Hilda og Keld. Begge forbrugere har nyttefunktion som anført ovenfor. Hilda har initialressourcer $\omega^H = (\omega_1^H, \omega_2^H)$ og Keld har initialressourcer $\omega^K = (\omega_1^K, \omega_2^K)$, hvor $\omega_2^H, \omega_2^K > 1$.

B. Hvad er Hildas og Kelds indkomster ved priserne p_1, p_2? Hvad er Hildas og Kelds efterspørgsel ved priserne p_1, p_2? Vis at

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{2}{\omega_1^H + \omega_1^K}, 1 \right)$$

er ligevægtspriser.

C. Antag at $\omega^H = (0,2)$ og $\omega^K = (2,4)$. Angiv ligevægtspriser og ligevægtsallokation. Er ligevægtsallokationen Pareto-optimal? Forklar dit svar.

D. Antag at de samlede initialressourcer er $\omega = (2,6)$. Er allokationen $(x^H, x^K) = ((1,3),(1,3))$ Pareto-optimal? For hvilke initialressourcer og priser er den pågældende allokation ligevægtsallokation. Forklar dit svar.

OPGAVE 11

Giv et par eksempler på offentlige goder. Begrund, at markedssystemets evne til at allokere optimalt mistes ved tilstedeværelsen af offentlige goder. Diskutér, hvilke muligheder, der under disse omstændigheder er, for at få opfyldt velfærdsteoriens hovedsætninger.

OPGAVE 12

Diskutér muligheden for at konstruere en samfundsnyttefunktion og anvendeligheden af en sådan funktion i mikroteorien.

Litteratur

Allen, R.G.D. (1975), Index numbers in theory and practice, London.

Arrow, K.J. (1951), Social choice and individual values, New-Haven, London.

Arrow, K.J. og G. Debreu (1954), Existence of equilibrium for a competitive economy, Econometrica 22, 265-290.

Arrow, K.J. og F.H. Hahn (1971), General competitive analysis, Holden-Day, San Francisco.

Balasko, Y. og K. Shell (1980), The overlapping generations model I: the case of pure exchange without money, Journal of economic theory 23, 281-306.

Berge, C. (1959), Espaces topologiques et fonctions multivoques, Dunod, Paris.

Bliss, C.J. (1975), Capital theory and the distribution of income, North-Holland, Amsterdam.

Debreu, G. (1959), Theory of value, Wiley, New York.

Debreu, G. (1970), Economies with a finite set of equilibria, Econometrica 38, 387-392.

Debreu, G. (1974), Excess demand functions, Journal of mathematical economics 1, 15-21.

Debreu og Arrow, se Arrow.

Drèze, J. (1975), Existence of exchange equilibrium under price rigidities, International Economic Review 16, 301 – 320.

Edgeworth, F.Y. (1881), Mathematical psychics, C. Kegan Poul, London.

Gale, D. (1955), The law of supply and demand, Mathematica Scandinavica 3, 155 – 169.

Gale, D. (1960), The theory of linear economic models, McGraw-Hill, New York.

Gale, D. og A. MasColell (1975), An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences, Journal of Mathematical Economics 2, 9 – 17.

Gibbard, A. (1973), Manipulation of voting schemes: A general result, Econometrica 41, 587 – 601.

Grandmont, J.-M. (1977), Temporary general equilibrium theory, Econometrica 45, 535 – 572.

Green, H.A.J. (1971), Consumer theory, Penguin Modern Economics, London.

Groves, T. og J. Ledyard (1977), Optimal allocation of public goods: A solution to the “free rider” problem, Econometrica 45, 783 – 810.

Hahn og Arrow, se Arrow.

Hicks, J.R. (1939), Value and capital, Oxford.

Houthakker, H.S. (1950), Revealed preference and the utility function, Econometrica 17, 159 – 74.

Johansen, L. (1977), Offentlig økonomikk, Universitetsforlaget, Oslo.

Klir, G. (1969), An approach to general systems theory, Van Nostrand Reinhold, New York.

Koopmans, T.C. (1951), Activity analysis of production and allocation, New York.

Laffont, J.-J. (1987), Le risque moral dans la relation de mandat, Revue Économique 5 – 23.

Lancaster, K. (1971), Consumer demand, a new approach, New York – London.

Lancaster, K. og R.G. Lipsey (1956-57), The general theory of second best, Review of Economic Studies 24, 11 – 32.

Ledyard og Groves, se Groves.

Lipsey og Lancaster, se Lancaster.

Luce, R.D. og H. Raiffa (1957), Games and decisions, Wiley, New York.

Malinvaud, E. (1972), Lectures on microeconomic theory, North-Holland, Amsterdam.

Malinvaud, E. (1977), The theory of employment reconsidered, Oxford.

MasColell og Gale, se Gale.

McKenzie, L. (1959), On the existence of general equilibrium for a competitive market, Econometrica 27, 54 – 71.

Morgenstern og von Neumann, se von Neumann.

Morishima, M. (1973), Marx's economics. A dual theory of value and growth, Cambridge.

von Neumann, J. og O. Morgenstern (1944), Theory of games and economic behaviour, Princeton University Press, Princeton.

Nikaido, H. (1956), On the classical multilateral exchange problem, Metroeconomica 8, 135 – 145.

Nikaido, H. (1986), Convex structures and economic theory, Academic Press.

Page, A.N. (1968), Utility theory: A book of readings, Wiley, New York.

Pareto, V. (1909), Manuel d'économie politique, Girard & Briere, Paris.

Pichler, F. (1975), Mathematische Systemtheorie, de Gruyter, Berlin-New York.

Raiffa og Luce, se Luce.

Rosenmüller, J. (1981), The theory of games and markets, North-Holland, Amsterdam.

Ross, S. (1973), The economic theory of agency. The principal's problem, American Economic Review 63, 134 – 139.

Rudin, W. (1953), Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill.

Samuelson, P.A. (1958), An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money, Journal of Political Economy 66, 467 – 482.

Satterthwaite, M.A. (1975), Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, Journal of Economic Theory 10, 187 – 217.

Sen, A. (1970), Collective choice and social welfare, Holden-Day, San Francisco.

Shafer, W. og H. Sonnenschein (1975), Some theorems on the existence of competitive equilibrium, Journal of Economic Theory 11, 83 – 93.

Shell og Balasko, se Balasko.

Shephard, R.W. (1970), Theory of cost and production functions, Princeton University Press, Princeton.

Slutskij, E.E. (1915), On the theory of the budget of the consumer; original version i: Giornale degli economisti 51, 1 – 26, engelsk udgave i: Readings in price theory, Allan & Unwin, 1953.

Smale, S. (1976), A convergent process of price adjustments and global Newton methods, Journal of Mathematical Economics 3, 107 – 120.

Sonnenschein og Shafer, se Shafer.

Stigler, G.J. (1950), The development of utility theory, Journal of Political Economy 58, 307 – 327, 373 – 396, genoptrykt i Page (1968).

von Thünen, J. (1842), Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie, Rostock.

Vind, K. (1976), Institutions in exchange economies, i: Los, J. og W.W. Los, Computing equilibria: How and Why, North-Holland, Amsterdam.

Walras, L. (1874, 1877), Eléments d'économie politique pure, L. Corbaz, Lausanne.

Walsh, V.V. (1970), Introduction to contemporary microeconomics, McGraw-Hill.

Stikordsregister