

Opgave II.1

- a) Stikprøvevariansen er vidt forskellig for de fire varetyper, men denne absolutte størrelse er vanskelig at sammenligne på tværs af varetyper, da disse har vidt forskellige niveauer, målt på stikprøvegennemsnittet. Den relevante størrelse er variationskoefficienten cv , der måler variationen relativt til niveauet for variablen. Den relative variation i omsætningen (estimeret ved $s/\bar{y}$) viser sig nogenlunde konstant for de 4 varetyper (mellem 2 og $2\frac{1}{2}$).

b)

$$\text{var}(\bar{y}) \approx \frac{(N - n)s^2}{nN} = \frac{1}{n}(1 - f)s^2 = \text{vâr}(\bar{y})$$

$$c\hat{v}(\bar{y}) \approx \sqrt{\text{vâr}(\bar{y})}/\bar{y}$$

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{vâr}(\bar{y})},$$

hvor $\bar{y}$ antages approksimeret ved normalfordeling med middelværdi $\bar{y}$ og varians $\text{vâr}(\bar{y})$:

$$\bar{y} \stackrel{\text{app.}}{\sim} N(\bar{y}, \text{vâr}(\bar{y}))$$

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \cdot cv(\bar{y}) \cdot \bar{y} = \bar{y}(1 \pm u_{1-\alpha/2} \cdot cv(\bar{y}))$$

$$N = 4.440 \quad n = 223$$

	Pålægschokolade	Chips
	$\bar{y} = 29118$ $s^2 = 66344^2$	$\bar{y} = 135$ $s^2 = 337^2$
$\text{var}(\bar{y})$	$\frac{1}{223} \left(1 - \frac{223}{4440} \right) 66344^2$ $= 4330^2$	$\frac{1}{223} \left(1 - \frac{223}{4440} \right) 337^2$ $= 22^2$
$\hat{c}v(\bar{y})$	0.149	0.163
95% konf.	[20531;37605]	[92;178]
	$\bar{y} \pm 29.2\%$	$\bar{y} \pm 31.9\%$

Shampoo	Instant kaffe
$\bar{y} = 161$ $s^2 = 396^2$	$\bar{y} = 258$ $s^2 = 582^2$
$\frac{1}{223} \left(1 - \frac{223}{4440} \right) 396^2$ $= 25.8^2$	$\frac{1}{223} \left(1 - \frac{223}{4440} \right) 582^2$ $= 344.7^2$
0.16	0.134
[110;212]	[1905;3257]
$\bar{y} \pm 31.4\%$	$\bar{y} \pm 26.3\%$

c)

$$n_0 = \frac{s^2}{\left(\frac{L_0}{2u_{1-\alpha/2}}\right)^2 + \frac{s^2}{N}},$$

hvor S^2 er estimeret ved s^2 .

i)

$$L_0 = 50 \quad n_0 = \frac{1}{\left(\frac{cv_0}{cv(y)}\right)^2 + \frac{1}{N}}, \quad cv(y) \approx \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{y}}$$

ii) $\bar{y} \pm 5\% \Rightarrow \bar{y} \pm 1,96 \cdot 2,551\% \Rightarrow cv_0 = 2,551\% = 0,02551$ for $L_0 = 0,10$ (10% af den fundne størrelse).

	Pålægsschokolade	Chips	Shampoo	Instant kaffe
i)	$n_0 = 4440$	$n_0 = 604$	$n_0 = 792$	$n_0 = 4328$
ii)	$n_0 = 2854$	$n_0 = 3021$	$n_0 = 3005$	$n_0 = 2621$

er minimum for stikprøvestørrelserne, givet kravene.

Opgave II.2

a)

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{p}) &= \frac{1}{n}(1 - f)s^2 = \frac{1}{n}(1 - f)p(1 - p)\frac{n}{n - 1} \\ &= \frac{1}{n} \frac{N - n}{N} \frac{n}{n - 1} p(1 - p) = \frac{N - n}{N(n - 1)} \cdot p(1 - p) \end{aligned}$$

$$\hat{cv}(\bar{p}) = \frac{\sqrt{\text{var}(\bar{p})}}{\bar{p}} = \sqrt{\frac{1 - p}{p}} \cdot \sqrt{\frac{N - n}{N(n - 1)}}$$

$$N = 152000 \quad n = 82$$

Konfidensinterval er:

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{u_{1-\alpha/2}} \sqrt{\mathbf{\hat{v}ar(p)}} ,$$

baseret på normalfordelingsantagelsen af estimatoren p. Intervallet udtrykkes relativt ved:

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} c\hat{v}(\bar{y}) \cdot \bar{y}$$

	Beroligende piller
p	2.4%
$\hat{v}ar(p)$	$\frac{152000 - 82}{152000(82 - 1)} 0.024(1 - 0.024)$ $= 0.0170^2$
$c\hat{v}(\bar{y})$	$\sqrt{\frac{1 - 0.024}{0.024}} \sqrt{\frac{152000 - 82}{152000(82 - 1)}}$ $= 0.708 = 70.8\% = \frac{0.0170}{0.024}$
Rel. konf.	2.4% $\pm$ 139%*
Abs. konf.	2.4% $\pm$ 3.3%** [-0.9%;5.7%]

Mavegener	Smertestillende
4.9% $\frac{152000 - 82}{152000(82 - 1)} 0.049(1 - 0.049)$ $= 0.024^2$ $\frac{0.024}{0.049} = 0.489 = 48.9\%$ 4.9% ± 95.8%* 4.9% ± 4.7%** [0.2%;9.6%]	32% $\frac{152000 - 82}{152000(82 - 1)} 0.32(1 - 0.32)$ $= 0.052^2$ $\frac{0.052}{0.32} = 0.162 = 16.2\%$ 32% ± 31.8%* 32% ± 10.2%** [21.8%;42.8%]

* Procent af den foregående størrelse

**Procentpoint

De negative nedre konfidensgrænser for andelen for beroligende piller indikerer, at normalfordelingsantagelsen for små andele ikke kan opretholdes. Den hypergeometriske fordeling af np er nemlig højreskæv, ingen negative værdier, for små værdier af p, hvilket gør en normalfordelingsapproksimation af np og dermed p urealistisk. En approksimation af np med Poissonfordelingen er her på sin plads for andelen p = 2.4% (og muligvis for andelen p = 4.9%). Se senere.

b)

i)

$$n_0 = \frac{\frac{N}{N-1} p(1-p)}{\left(\frac{L_0}{2u_{1-\alpha/2}} \right)^2 + \frac{p(1-p)}{N-1}}, \quad L_0 = 0.05.$$

Her tages p som udtryk for den sande værdi P.

$$\text{ii)} \quad \bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} cv(\bar{y}) \bar{y};$$

$$2u_{1-\alpha/2} cv_0 \bar{y} = 0.05 \bar{y} \Rightarrow cv_0 = \frac{0.05}{2u_{1-\alpha/2}}$$

$$n_0 = \frac{\frac{N}{N-1}}{\frac{p}{1-p} cv_0^2 + \frac{1}{N-1}}$$

	Beroligende piller	Mavegener	Smertestillende
i)	$n_0 = \frac{\frac{152000}{152000-1} \cdot 0.024(1-0.024)}{\left(\frac{0.05}{2 \cdot 1.96}\right)^2 + \frac{0.024(1-0.024)}{152000-1}}$ $= 144$	$n_0 = 287$ er minimum	$n_0 = 1326$
ii)	$n_0 = \frac{152000/(152000-1)}{\frac{0.024}{1-0.024} \left(\frac{0.05}{2 \cdot 1.96}\right)^2 + \frac{1}{152000-1}}$ $= 94522$	$n_0 = 66837$ er minimum	$n_0 = 12028$

- a) Den relativt lave andel af bekræftende svar for beroligende piller og mavegener betyder, at den tilsvarende hypergeometriske fordeling over antallet i stikprøven bliver skæv. På baggrund heraf dannes et approksimativt konfidensinterval baseret på Poissonfordelingen.

Beroligende piller:

$$x = 82 \cdot 0.024 = 1.97 \approx 2$$

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_1: & P(x \geq 2) = 0.025 \Leftrightarrow P(x \leq 1) = 0.975 \\
 & \lambda: 0.20 \qquad \qquad \qquad 0.25 \\
 & P(x \leq 1): 0.9825 \qquad \qquad \qquad 0.9735
 \end{array}$$

Ved lineær interpolation:

$$\alpha \cdot 0.9825 + (1 - \alpha)0.9735 = 0.975 \Leftrightarrow \alpha = \frac{0.975 - 0.9735}{0.9825 - 0.9735} = 0.167$$

$$\lambda_1 = 0.167 \cdot 0.20 + (1 - 0.167)0.25 = 0.24$$

$$\begin{array}{ll}
 \lambda_2: & P(x \leq 2) = 0.025 \\
 & \lambda: 7.20 \qquad \qquad \qquad 7.30 \\
 & P(x \leq 2): 0.0255 \qquad \qquad \qquad 0.0236
 \end{array}$$

$$\alpha \cdot 0.0255 + (1 - \alpha)0.0236 = 0.025 \Leftrightarrow \alpha = \frac{0.025 - 0.0236}{0.0255 - 0.0236} \Rightarrow \alpha = 0.737$$

$$\lambda_2 = 0.737 \cdot 7.20 + (1 - 0.737)7.30 = 7.23$$

Konfidensinterval for p: $[\lambda_1/n, \lambda_2/n]$ giver [0.3% ; 8.8%] .

Mavegener:

$$x = 82 \cdot 0.049 \approx 4$$

$$\lambda_1: (< x): P(x \geq 4) = 0.025 \Rightarrow \lambda_1 = 1.09$$

$$\lambda_2: (> x): P(x \leq 4) = 0.025 \Rightarrow \lambda_2 = 10.26$$

$[\lambda_1/n, \lambda_2/n]$ giver [1.3% ; 12.5%] .

Smertestillende:

$$x = 0.32 \cdot 82 \approx 26$$

$$\lambda_1: (< x): P(x \geq 26) = 0.025 \Rightarrow P(x \leq 25) = 0.975 \Rightarrow \lambda_1 = 17$$

$$\lambda_2: (> x): P(x \leq 26) = 0.025 \Rightarrow \lambda_2 = ? \text{ (ikke muligt med tabelopslag) .}$$

Konfidensintervallerne baseret på Poisson-approksimationen er længere end de tilsvarende intervaller baseret på normalfordelingen, hvilket skyldes at variansen i Poisson-approksimationen, som er $\lambda = nP$, er større end den hypergeometriske varians,

der anvendes i normalfordelingsapproximationen:

varians, hypergeometrisk fordeling, estimeret

varians, Poissonfordeling, estimeret

$$\text{vâr}(np) = \frac{n^2(N - n)}{N(n - 1)} p(1 - p) = 1.94$$

$$np = 1.97$$

Opgave II.3

a)

$$\text{vâr}(\bar{y}) = \frac{1}{n}(1 - f)s^2 \qquad c\hat{v}(\bar{y}) = \frac{\sqrt{\text{vâr}(\bar{y})}}{\bar{y}}$$

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{vâr}(\bar{y})}$$

$$N = 152000 \qquad n = 82$$

Øl	Gang/cykling
$\bar{y} = 3.5 \qquad s^2 = 7.9^2$ $\text{vâr}(\bar{y}) = \frac{1}{82} \left(1 - \frac{82}{152000} \right) 7.9^2 = 0.87^2$ $c\hat{v}(\bar{y}) = \frac{0.87}{3.5} = 0.25$ $3.5 \pm 1.96 \cdot 0.87 = [1.8 ; 5.2]$ $3.5 \pm 49\%$	$\bar{y} = 47 \qquad s^2 = 46^2$ $\text{vâr}(\bar{y}) = \frac{1}{82} \left(1 - \frac{82}{152000} \right) 46^2 = 5.1^2$ $c\hat{v}(\bar{y}) = \frac{5.1}{47} = 0.11$ $47 \pm 1.96 \cdot 5.1 = [37 ; 57]$ $47 \pm 21\%$

b)

i)

$$n_0 = \frac{S^2}{(L_0/2u_{1-\alpha/2})^2 + S^2/N} \approx \frac{s^2}{(L_0/2u_{1-\alpha/2})^2 + s^2/N},$$

d.v.s. stikprøvevariansen s^2 anvendes som udtryk for populationsvariansen S^2 .

$$n_0 = \frac{1}{(cv_0/cv(y))^2 + 1/N}, \quad cv(y) \approx \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{y}}, \quad cv_0 = \frac{0.05}{2 \cdot 1.96} = 0.0128$$

Øl	Gang/cykling
$L_0 = 0.2$ $n_0 = \frac{7.9^2}{\left(\frac{0.2}{2 \cdot 1.96^2}\right) + 7.9^2/152000}$ $= 20709 \text{ er minimum}$ $n_0 = \frac{1}{\left(\frac{0.128}{7.9/3.5}\right)^2 + 1/152000}$ $= 25815 \text{ er minimum}$	$L_0 = 2$ $n_0 = \frac{46^2}{\left(\frac{2}{2 \cdot 1.96^2}\right) + 46^2/152000}$ $= 7717 \text{ er minimum}$ $n_0 = \frac{1}{\left(\frac{0.128}{46/47}\right)^2 + 1/152000}$ $= 5630 \text{ er minimum}$

Opgave II.4

a) $\bar{Y} = 132400 \quad S^2 = 94900^2 \quad N = 5129778 \quad n = 1000$

95% konfidensinterval for $\bar{y}$: $\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2(N-n)}{nN}}$

$$\bar{y} \pm 1.96 \sqrt{\frac{94900^2(5129778 - 1000)}{1000 \cdot 5129778}} = [\bar{y} - 5881; \bar{y} + 5881] \text{ giver } L = 2 \cdot 5881 = 11762$$

$$\bar{y} \pm 1.96 \cdot \text{cv}(\bar{y}) \cdot 100\% \quad \text{giver} \quad \bar{y} \pm 4.44\%$$

b) $\text{cv}_0 = 0.001$

$$\text{cv}(\bar{y}) = \frac{\sqrt{\text{var}(\bar{y})}}{E[\bar{y}]} = \frac{\sqrt{\frac{94900^2(5129778 - 1000)}{1000 \cdot 5129778}}}{132400} = 0.0227$$

$$n_0 = \frac{1}{(\text{cv}_0/\text{cv}(y))^2 + 1/N} \rightarrow n_0 = \frac{1}{\left(0.001/\frac{94900}{132400}\right)^2 + 1/5129778} = 466987 \text{ er minimum}$$

- c) Det må antages, at væksten i indkomsten har udgjort samme procentdel for alle, således at alle beløb i kroner skal ganges med $1 + i$.

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_{t+1} &= (1 + i)\bar{Y}_t \\ S_{t+1}^2 &= (1 + i)^2 S_t^2 \end{aligned} \right\} \text{cv}_{t+1}(y) = \frac{\sqrt{S_{t+1}^2}}{\bar{Y}_{t+1}} = \frac{\sqrt{(1 + i)S_t^2}}{(1 + i)\bar{Y}_t} = \frac{\sqrt{S_t^2}}{\bar{Y}_t} = \text{cv}_t(y)$$

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \text{cv}_{t+1}(\bar{y}) \cdot 100\% = \bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \text{cv}_t(\bar{y}) \cdot 100\%$$

$$\text{cv}_{t+1}(\bar{y}) = \sqrt{\frac{1}{n}(1 - f)(1 + i)S_t^2/(1 + i)\bar{Y}_t} = \sqrt{\frac{1}{n}(1 - f)\text{cv}_t(y)} = \text{cv}_t(\bar{y})$$

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{var}_{t+1}(\bar{y})} = \bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} (1 + i) \sqrt{\text{var}_t(\bar{y})}, \quad L_{t+1} = (1 + i)L_t$$

$$\text{var}_{t+1}(\bar{y}) = \frac{1}{n}(1 - f)(1 + i)^2 S_t^2$$

Opgave II.5

Alternativ variation $N = 1700$ $n = 0.25 \cdot 1700 = 425$. Antag at udvælgelsen er simpel tilfældig

med $p = 0.95$

$$\hat{\text{var}}(p) = p(1 - p) \frac{1}{n - 1} (1 - f) \Rightarrow \hat{\text{var}}(p) = 0.95 \cdot 0.05 \cdot \frac{1}{424} \left(1 - \frac{425}{1700} \right) = 0.009^2$$

$$c \hat{v}(p) = \frac{\sqrt{\hat{\text{var}}(p)}}{p} \Rightarrow c \hat{v}(p) = \frac{0.009}{0.95} = 0.0096$$

$$p \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\text{var}}(p)} \Rightarrow 0.95 \pm 1.96 \cdot 0.009 = [93.2\% ; 96.8\%]$$

$$p \pm u_{1-\alpha/2} c \hat{v}(p) \Rightarrow 0.95 \pm 1.96 \cdot 0.0096 \cdot 100\% = 0.95 \pm 1.9\%$$

95% konfidensinterval udregnet på baggrund af den komplementære andel:

$$1 - p = 0.05 \Rightarrow x = 0.05 \cdot 425 = 21$$

$$\lambda_1: (< x): P(x \leq 20) = 0.975 \Rightarrow \lambda_1 = 13 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{n} = \frac{13}{425} = 0.031$$

$$\lambda_2: (> x): P(x \leq 21) = 0.025 \Rightarrow \lambda_2 = 25 \Rightarrow \frac{\lambda_2}{n} = \frac{25}{425} = 0.059$$

$$1 - p: [0.031 ; 0.059] \Rightarrow p: [0.941 ; 0.969]$$

Opgave II.6

$$p \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1 - f}{n - 1} p(1 - p)}$$

Nærum	Landsplan
$n = 396$ $N = \frac{1700}{0.15} = 11333$ $p = 0.94$ $0.94 \pm 1.96 \sqrt{\frac{1 - 396/11333}{396 - 1} \cdot 0.94 \cdot 0.06}$ $= 0.94 \pm 0.0230 = [91.7\% ; 96.3\%]$	$n = 0.27 \cdot 60000 = 16200$ $N = \frac{60000}{0.15} = 400000$ $p = 0.94$ $0.94 \pm 1.96 \sqrt{\frac{1 - 16200/400000}{16200 - 1} \cdot 0.94 \cdot 0.06}$ $= 0.94 \pm 0.0036 = [93.6\% ; 94.4\%]$

Opgave II.7

$N = 500000$

Den forventede gevinst opgøres uden fradrag for de 20 kr. loddet koster.

$$\bar{Y} = \frac{1}{500000}(1 \cdot 500000 + 15 \cdot 10000 + \dots + 60000 \cdot 20 + 397321) = \frac{4363000}{500000} = 8.7 \approx 9$$

a)

$$s^2 = \frac{1}{500000 - 1}(1 \cdot (500000 - 9)^2 + 15 \cdot (10000 - 9)^2 + \dots + 397321(0 - 9)^2) = 709.7^2$$

b)

$$\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{var}(\bar{y})} = \bar{y} \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n}(1 - f)s^2}$$

giver

$n = 10$:

$$\bar{y} \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{10} \left(1 - \frac{10}{500000} \right) 709.7^2} = \bar{y} \pm 440$$

$$n = 1000: \quad \bar{y} \pm 43.9$$

$$n = 10000: \quad \bar{y} \pm 13.8$$

Fordelingen af gevinster y er **meget højreskæv**, derfor de negative venstre konfidensgrænser.

Opgave II.8

a)

$$\begin{aligned} \bar{Y}_G &= 0.65 \frac{5000 + 0}{2} + 0.25 \frac{15000 + 5000}{2} + 0.07 \frac{50000 + 5000}{2} + 0.03 \frac{100000 + 50000}{2} \\ &= 8650 \text{ (intervalendepunkter: 0 \& 100000kr.)} \end{aligned}$$

$$s_G^2 = 0.65 \left(\frac{5000 + 0}{2} - 8650 \right)^2 + \dots + 0.03 \left(\frac{100000 + 50000}{2} - 8650 \right)^2 = 6753^2$$

b)

$$N = 2200000$$

y_j , $j = 1, \dots, N$: Husstandens samlede indestående på gevinstkonti.

$N\bar{Y}_H$: Alle landets husstandes indestående på gevinstkonti.

$\bar{Y}_H$: Forventede indestående pr. husstand.

Krav:

$$N\bar{y} \pm 1\% \Rightarrow 0.01 = 1.96 \cdot cv(N\bar{y}) = 1.96 \cdot cv(\bar{y}) \Rightarrow cv_0 = \frac{0.01}{1.96} = 0.0051$$

$$n_0 = \frac{1}{\left(\frac{cv_0}{cv(y)}\right)^2 + \frac{1}{N}}, \text{ hvor } cv(y) \text{ approksimeres ved } \frac{\sqrt{s_G^2}}{\bar{Y}_G}$$

$$\frac{\sqrt{s_G^2}}{\bar{Y}_G} = \frac{6753}{8650} = 0.7807$$

$$n_0 = \frac{1}{\left(\frac{0.0051}{0.7807}\right)^2 + \frac{1}{2200000}} = 23186$$

Opgave II.9

$$N = 8000 \quad n = 300$$

$$p \pm 1.96\sqrt{\hat{var}(p)} ; \hat{var}(p) = p(1 - p)\frac{N - n}{(n - 1)N}$$

Soc. dem: $p = 0.46$

$$\hat{var}(p) = 0.46(1 - 0.46)\frac{8000 - 300}{(300 - 1)8000} = 0.028^2$$

95% konfidensinterval: $0.46 \pm 1.96 \cdot 0.028 \Rightarrow 0.46 \pm 0.055$

46% $\pm$ 5.5% eller [40.5% ; 51.5%]

SF: $p = 0.10$

$$\hat{var}(p) = 0.10(1 - 0.10)\frac{8000 - 300}{(300 - 1)8000} = 0.017^2$$

95% konfidensinterval: $0.10 \pm 1.96 \cdot 0.017 \Rightarrow 0.10 \pm 0.033$

$10\% \pm 3.3\%$ eller $[6.7\% ; 13.3\%]$.

Den ekstreme andel ($p = 0.10$ for SF) bestemmes mere præcist.

Opgave II.10

- a) En rimelig præcision? $\pm 2\%$ (absolut)?
 $\pm 5\%$ (absolut)?

Afhænger af anvendelsen.

b)

$$p \pm 5\% \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\text{var}(p)} \Rightarrow v_0 = \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = 0.0255^2$$

$$x = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{41} = 0.195 \quad N = 180000$$

$$n_0 = \frac{\frac{N}{N-1} P(1-P)}{V_0 + \frac{P(1-P)}{N-1}}, \text{ hvor } p \text{ bruges som rettesnor for } P$$

$$n_0 = \frac{\frac{180000}{180000-1} \cdot 0.195(1-0.195)}{0.0255^2 + \frac{0.195(1-0.195)}{179999}} = 241$$

Opgave II.11

$$n = 1184 \quad N = 15000 \quad x = 2 \quad p = \frac{2}{1184} = 0.0017$$

$$Np \pm N \cdot 1.96 \sqrt{p(1-p) \frac{N-n}{(n-1)N}}$$

$$15000 \cdot 0.0017 \pm 15000 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{0.0017(1-0.0017) \frac{15000-1184}{1183 \cdot 15000}}$$

$$26 \pm 34 \quad \text{eller} \quad [-8 ; 60] .$$

Normalfordelingsantagelsen er tvivlsom. I stedet anvendes konfidensinterval baseret på Poisson-fordelingen:

$$X = np \sim \text{Ps}(\lambda = nP) .$$

Konfidensgrænser:

$$\begin{aligned} \lambda_1: (<x): P(X \geq 2) = 0.025 &\Leftrightarrow P(X \leq 1) = 0.975 \Rightarrow \lambda_1 \\ &= \frac{0.975 - 0.9735}{0.9825 - 0.9735} \cdot 0.20 + \left(1 - \frac{0.975 - 0.9735}{0.9825 - 0.9735} \right) 0.25 = 0.24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2: (>x): P(X \leq 2) &= 0.025 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \frac{0.975 - 0.0236}{0.0255 - 0.0236} \cdot 7.20 + \left(1 - \frac{0.025 - 0.9735}{0.0255 - 0.0236} \right) 7.30 = 7.23 \end{aligned}$$

Konfidensgrænser for fyr med brugsforbud på landsplan:

$$\left[\frac{N}{n} \cdot \lambda_1 ; \frac{N}{n} \cdot \lambda_2 \right] = [3.04 ; 91.60] \approx [3 ; 92]$$

Opgave II.12

$n = 500$ $N = 5129000$. Antag simpel tilfældig udvælgelse

$$p \pm 1.96 \sqrt{\frac{N - n}{N(n - 1)} p(1 - p)}$$

Sigurd: $p = 0.17$

$$0.17 \pm 1.96 \sqrt{\frac{5129000 - 500}{5129000 \cdot 499} 0.17(1 - 0.17)}$$

$$0.17 \pm 0.033 \quad 17\% \pm 3.3\% \quad [13.7\% ; 20.3\%]$$

Øget agtpågivenhed: $p = 0.34$

$$0.34 \pm 1.96 \sqrt{\frac{5129000 - 500}{5129000 \cdot 499} 0.34(1 - 0.34)}$$

$$0.34 \pm 0.042 \quad 34\% \pm 4.2\% \quad [28.8\% ; 38.2\%]$$

Opgave II.13

Mørbrade: $n = 50$ $x = 0$ $p = 0$, mens N principielt er ukendt.

95% konfidensinterval baseret på Poisson-fordelingen:

$[0, -\ln(\alpha)/n]$ giver:

$$\alpha_2 = -\ln 0.05/50 = 0.06 \quad [0 ; 6\%]$$

Alle produkter:

$n = 931$ $x = 34$ $p = 34/931 = 0.037$, mens N principielt er ukendt.

$$\lambda_1 < x: P(X \geq 34) = 0.025 \Rightarrow P(X \leq 33) = 0.975$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{0.975 - 0.9686}{0.9813 - 0.9686} \cdot 23 + \left(1 - \frac{0.975 - 0.9686}{0.9813 - 0.9686} \right) \cdot 24 = 23.5$$

$$\lambda_2 > x: P(X \leq 34) = 0.025 \Rightarrow \lambda_2 = ? \text{ (ej tabelleret, da } \lambda_2 \text{ er for stor) .}$$

I denne situation kan venstre endepunkt beregnes ud fra $\lambda_1 = 23.5$ som $23.5/931 = 0.0252$, mens højre endepunkt kun kan beregnes ved hjælp af normalfordelings approksimationen.

Konfidensinterval baseret på normalfordelingen:

$$p \pm 1.96 \sqrt{\frac{N - n}{N(n - 1)} p(1 - p)} ,$$

hvor faktoren $N - n/N \simeq 1$, da N er ukendt, men antages stor i forhold til $n = 931$, således at endelighedskorrektionen bliver ubetydelig.

$$0.037 \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{934 - 1} \cdot 0.037(1 - 0.037)}$$

$$3.7\% \pm 1.21\% = [2.5\% ; 4.9\%] .$$