Eksamen MakØk. 2, 8/11-2013

Opg. 1) Diamond OLG model, ρ

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \quad \theta > 0.$$

a) Fra L'Hopital's regel for "0/0":

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} = \lim_{\theta \to 1} \frac{e^{(1-\theta)\ln c}-1}{1-\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 1} \frac{e^{(1-\theta)\ln c} \cdot (-\ln c)}{-1} = \ln c.$$

Derfor kan tilfældet tolkes som $u(c) = \ln c$, og da har vi $\theta(c) \equiv -\frac{c}{u'(c)} u''(c) = -\frac{c}{c^{-1}}(-c^{-2}) = c^0 = 1$.

b) $$\max_{(c_0, c_1)} U_0 = \frac{c_0^{1-\theta}-1}{1-\theta} + (1+\rho)^{-1} \frac{c_1^{1-\theta}-1}{1-\theta} \text{ ub.}$$

$c_0 + s = w_0$ (1)

$c_1 = (1+r_1)s$ (2)

$c_0 \geq 0, \; c_1 \geq 0$

$$\tilde{U} = \frac{(w_0 - s)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + (1+\rho)^{-1} \frac{[(1+r_1)s]^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

$$\frac{d\tilde{U}}{ds} = (w_0 - s)^{-\theta}(-1) + (1+\rho)^{-1}[(1+r_1)s]^{-\theta}(1+r_1) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{w_0 - s}{(1+r_1)s}\right)^{-\theta} = \frac{1+r_1}{1+\rho} \Rightarrow \frac{w_0 - s}{(1+r_1)s} = \left(\frac{1+r_1}{1+\rho}\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$\Rightarrow w_0 = s + \frac{(1+r_1)^{1-\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{-1/\theta}} s = \left[1 + (1+\rho)^{1/\theta}(1+r_1)^{1-1/\theta}\right] s$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{1 + (1+\rho)^{1/\theta}(1+r_1)^{1-1/\theta}} w_0.$$

c) $c_0 = w_0 - \frac{1}{1+(1+\rho)^{1/\theta}(1+r_1)^{1-1/\theta}} w_0$

$$= \frac{(1+\rho)^{1/\theta}(1+r_1)^{1-1/\theta}}{1+(1+\rho)^{1/\theta}(1+r_1)^{1-1/\theta}} w_0$$

$$= \frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+r_1)^{\frac{1-\theta}{\theta}} + (1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}} \cdot w_0 \qquad (*)$$

d)

Fra (1) og (2) fås IBC:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r_1} = w_0 \qquad \text{(IBC)}$$

$r_1 \uparrow \Rightarrow \frac{1}{1+r_1} \downarrow \Rightarrow c_1$ billigere set fra periode 0

$\Rightarrow$ subst. effekt på c_0 negativ og indkomst effekt på c_0 positiv.

Men højresiden i (IBC) påvirkes ikke af $r_1 \uparrow$. Derfor ingen formueeffekt.

Udsagn (i) er derfor <u>falsk</u>.

Fra (*) ses, at når $\theta > 1$, vil $r \uparrow \Rightarrow c_0 \uparrow$.

Udsagn (ii) er altså <u>sandt</u>.

I Ramseymodellen har vi

$$c_0 = \beta_0 (a_0 + h_0), \text{ hvor}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\int_0^\infty e^{\int_0^t \left(\frac{(1-\theta) r_s - \rho}{\theta} + n\right) ds} dt} \text{ og}$$

$$h_0 = \int_0^\infty w_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt .$$

For vurdering af de to udsagn er IBC også nyttig:

$$PV(c) = \int_0^\infty c_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt \overset{(\leq)}{=} a_0 + h_0 .$$

Renteniveau ↑ ⇒ PV(c) ↓ for $a_0 + h_0$ given. Altså er indkomsteffekten på c_0 positiv.

Renteniveau ↑ ⇒ set fra tid 0 er fremtidigt forbrug billigere end før ⇒ substitutionseffekten på c_0 er negativ

Renteniveau ↑ ⇒ h_0 ↓ ⇒ formueeffekten på c_0 er negativ.

Altså er <u>(i) sand</u>.

Når $\theta > 1$, vil renteniveau ↑ ⇒ β_0 ↑. Men da h_0 ↓, er den totale effekts fortegn ubestemt. <u>(ii)</u> derfor falsk.

Opg. 2)

$$r > g_Y \geq 0 \quad , \quad \tilde{T}_t = \tau(Y_t + X_t + rB_t)$$

$$GBD_t = rB_t + G_t + X_t - \tilde{T}_t \equiv rB_t + G_t - T_t$$

$$B_{t+1} = (1+r)B_t + G_t - T_t = B_t + GBD_t$$

b) Vi antager, at $B_t > 0$, $G_t = \gamma Y_t$, $X_t = \chi Y_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \gamma < 1$, $\chi = \frac{\tau - \gamma}{1-\tau}$

$$GBD_t = rB_t + \gamma Y_t + \chi Y_t - \tilde{T}_t \qquad (*)$$

$$= \underline{rB_t} + (\gamma + \chi)Y_t - \tau(Y_t + \chi Y_t + \underline{rB_t})$$

$$= (1-\tau)rB_t + (\gamma + \chi - \tau - \tau\chi)Y_t$$

$$= (1-\tau)rB_t + [\gamma - \tau + (1-\tau)\chi]Y_t$$

$$= (1-\tau)rB_t + [\gamma - \tau + \tau - \gamma]Y_t$$

$$= (1-\tau)rB_t .$$

Induktion:

$$B_t > 0 \Rightarrow GBD_t > 0 \Rightarrow B_{t+1} = B_t + GBD_t > 0$$

Vi ved, at $B_0 > 0$. Derfor $GBD_t > 0 \quad \forall t \geq 0$.

c)

Vi har $B_{t+1} = B_t + (1-\tau)r B_t = [1+(1-\tau)r]B_t$

$$b_{t+1} = \frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{[1+(1-\tau)r]B_t}{(1+g_Y)Y_t} = \frac{1+(1-\tau)r}{1+g_Y} b_t$$

$$= \left(\frac{1+(1-\tau)r}{1+g_Y}\right)^2 b_{t-1}$$

$$= \left(\frac{1+(1-\tau)r}{1+g_Y}\right)^{t+1} b_0$$

Løsning: $b_t = \left(\frac{1+(1-\tau)r}{1+g_Y}\right)^t b_0$.

d) $\frac{1+(1-\tau)r}{1+g_Y} \leq 1$ for $1+(1-\tau)r \leq 1+g_Y$

dvs $r - \tau r \leq g_Y$

dvs $\tau \geq \frac{r - g_Y}{r} = \hat{\tau} \in (0, 1]$ (**)

e) Antag $g_Y = 0$. Så $\hat{\tau} = 1$ og da $\tau < 1$, er (*) ikke overholdt.
Den førte finanspolitikk er altså uholdbar.

f) Antag $g_Y > 0$. Så er $\hat{\tau} < 1$ og
$\tau \geq \hat{\tau}$ altså muligt samtidig med,
at $\tau < 1$.
Svaret er altså: ja.

g) Antag, at $T = \tau(Y_t + X_t)$ samtidig
med at $g_Y > 0$.

Fra (*) fås

$$GBD_t = rB_t + (\gamma + \chi)Y_t - \tau(Y_t + \chi Y_t)$$

$$= rB_t + [\gamma + \chi - \tau(1+\chi)]Y_t$$

$$= rB_t + [\gamma - \tau + (1-\tau)\chi]Y_t$$

$$= rB_t + [\gamma - \tau + \tau - \gamma]Y_t$$

$$= rB_t$$

$$B_{t+1} = B_t + GBD_t = B_t + rB_t = (1+r)B_t$$

$$b_{t+1} = \frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{(1+r)B_t}{(1+g_Y)Y_t} = \frac{1+r}{1+g_Y} b_t$$

$$= \left(\frac{1+r}{1+g_Y}\right)^{t+1} b_0 \to \infty \text{ for } t \to \infty, \text{ da } r > g_Y.$$

Finanspolitikken er altså uholdbar.
Kommentar: Fravær af beskatning af renteindkomst øger faren for gældseksplosion.

Opg. 3) G_t, X_t er lump sum overførsler.
$\tau \in (0,1)$, $\tilde{\gamma} = G_t/(T_t L_t)$, $x_t = X_t/L_t$
Bal. budget.

$$\dot{\tilde{k}}_t = f(\tilde{k}_t) - \tilde{c}_t - \tilde{\gamma} - (\delta + g + n)\tilde{k}_t, \quad k_0 > 0 \text{ given}, \quad (*)$$

$$\dot{\tilde{c}}_t = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)(f'(\tilde{k}_t) - \delta) - \rho - \theta g\right]\tilde{c}_t \qquad (**)$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}_t e^{-\int_0^t [(1-\tau)(f'(\tilde{k}_s)-\delta) - g - n]ds} = 0 \qquad (***)$$

$$\lim_{\tilde{k}\to 0} f'(\tilde{k}) - \delta > \frac{\rho + \theta g}{1-\tau} > n + g > \lim_{\tilde{k}\to\infty} f'(\tilde{k}) - \delta$$

a) (*) er essentielt en omskrivning af en nationalregnskabs-identitet for en lukket økonomi, idet $\dot{K}_t = Y_t - c_t L_t - G_t - \delta K_t$ og definitionerne $\tilde{c}_t \equiv \frac{C_t}{T_t L_t}$ og $\tilde{k}_t \equiv K_t/(T_t L_t)$ kombineret med $T_t = T_0 e^{gt}$ og $L_t = L_0 e^{nt}$ giver (*).

(**) er den aggregerede Keynes-Ramsey-regel udtrykt i vækstkorrigerede variable og med indregning af at efter-skat renten er $(1-\tau)r_t = (1-\tau)(f'(\tilde{k}) - \delta)$.
(***) er TVC for den repræsentative husholdning i generel ligevægt, hvor $r_t = f'(\tilde{k}_t) - \delta$ og efter-skat renten er $(1-\tau)r_t$.

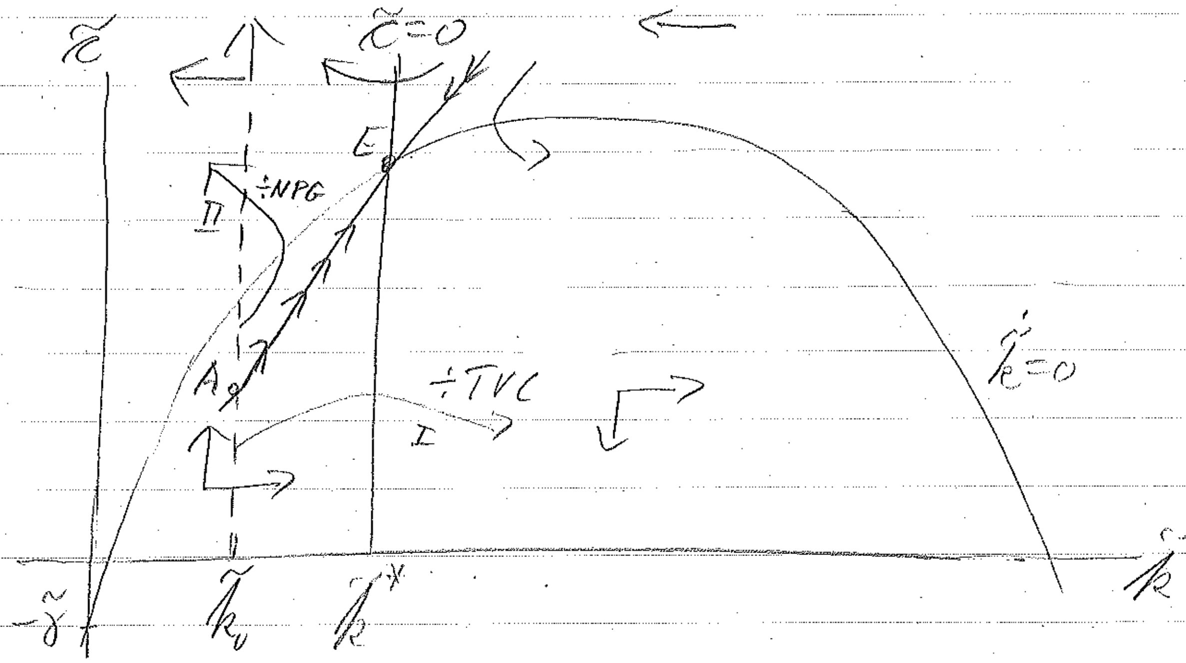
δ = kapitalnedslidningsrate
n = befolkningsvækstrate

g = teknologiens vækstrate
θ = grænsenytteelasticitet (måler ønske om forbrugsudjævning)
ρ = tidspræferencerate = nyttediskonteringsrate

$\dot{\tilde{k}} \lesseqgtr 0$ for $\tilde{c} \gtreqless f(\tilde{k}) - \tilde{\gamma} - (\delta + g + n)\tilde{k}$

$\dot{\tilde{c}} \gtreqless 0$ for $f'(\tilde{k}) - \delta \gtreqless \frac{\rho + \theta g}{1-\tau}$ dvs. for $\tilde{k} \lesseqgtr \tilde{k}^*$, hvor

$\tilde{k}^*$ opfylder $f'(\tilde{k}^*) - \delta = \frac{\rho + \theta g}{1-\tau}$.



Steady state E er et saddelpunkt. Økonomien vil på tid 0 være i punktet A og vil over tid følge saddelbanen og dermed konvergere mod E.
Dette forløb opfylder alle ligevægtsbetingelserne under perfekt forudseenhed, som Ramsey modellen jo forudsætter.

NB! Grafen for $\dot{\tilde{k}}=0$ er tegnet for tilfældet $f(0)=0$. Hvis $f(0)>0$, skærer grafen $\tilde{c}$-aksen i $(0, f(0)-\tilde{\gamma})$.

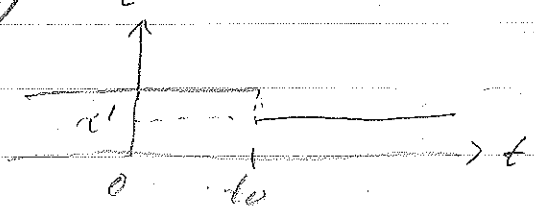
De divergerende baner kan udelukkes fordi de, der ender med

Type I: at bevæge sig mod sydøst bryder TVC, og de, der ender med at gå mod nord-

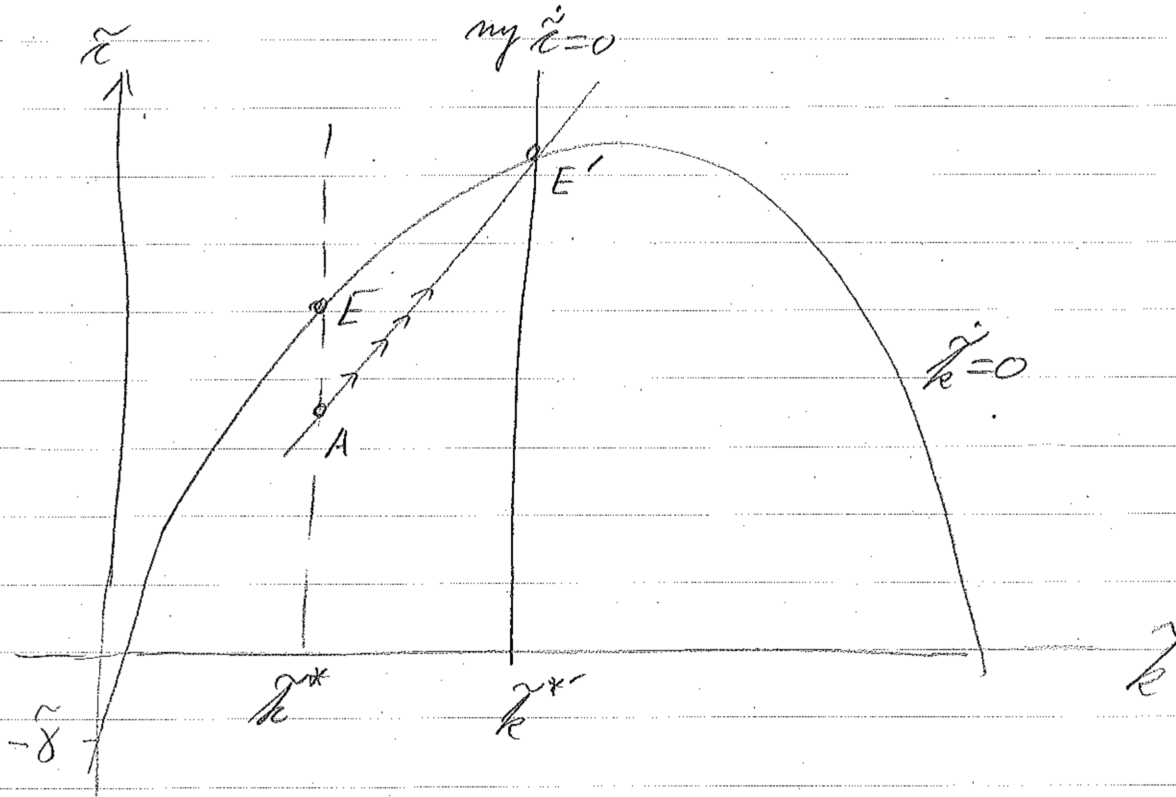
Type II: vest, bryder med NPG (og dermed i øvrigt også bryder med TVC).

c) Nej, det er nok at (****) gælder, når samtidig $\tilde{\gamma}$ er af „moderat" størrelse.

d)



Stadig balanceret budget efter t_0.



På tid t_0 springer forbrugsniveauet ned fra E til A. Derefter følges den nye saddelbane mod den nye steady state E′ med $\bar{k}^{*\prime} > \bar{k}^{*}$ og $\bar{c}^{*\prime} > \bar{c}$.

Fortolkningen af springet ned er at efter t_0 er efter-skat renten
$$(1-\tau')r_t > r_t$$

Dette medfører lavere h_{t_0}, dels fordi diskonteringen af fremtidige arbejdsindkomster nu er kraftigere, dels fordi indkomstens førsterum nu er mindre, da der stadig er balanceret budget: $\tau r_t k_t = G_t + \tau_t L_t$.[x)]

Desuden er fremtidigt forbrug set fra tidspunkt t_0 blevet billigere.[xx)]

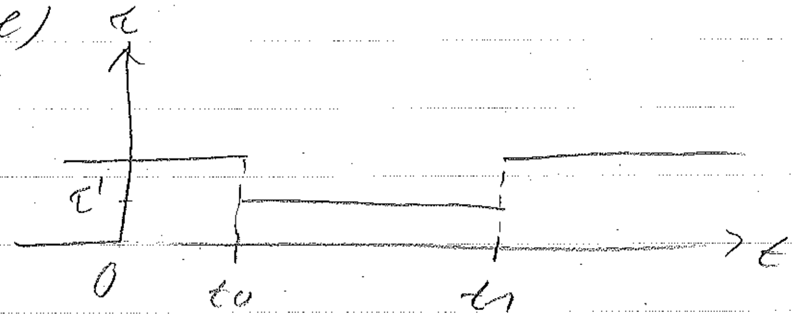
Den med forbrugsfaldet forbundne højere opsparing medfører, at $\bar{k}$ stiger gradvis over tid, hvilket i kombination med den faldende grænseproduktivitet af kapital resulterer i konvergens mod den nye steady state.

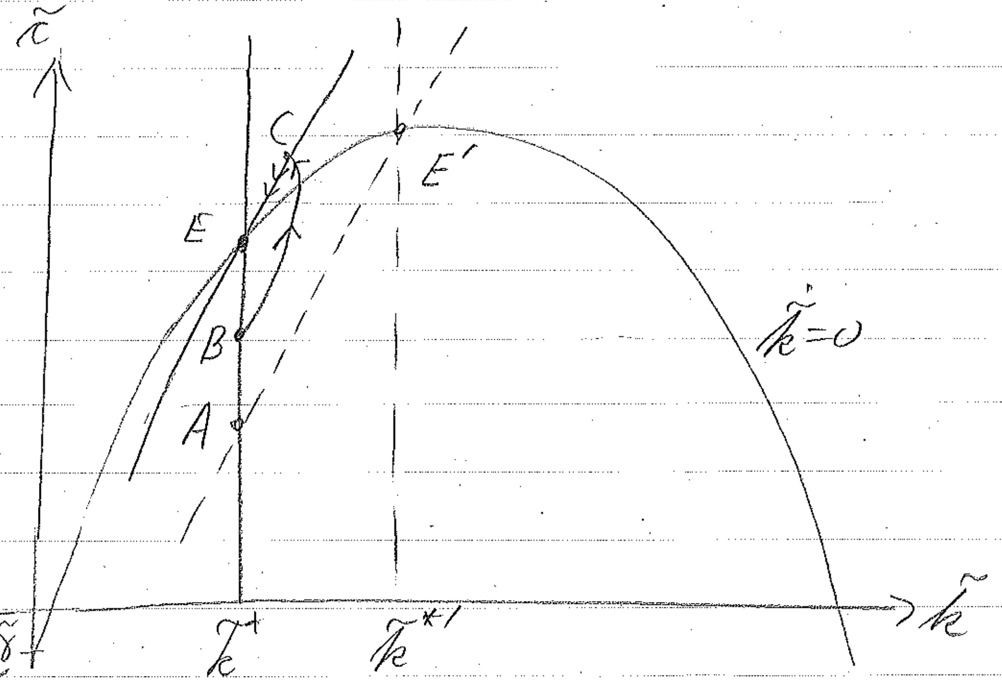
---

x) Der er altså en negativ formueeffekt på c_{t_0}.

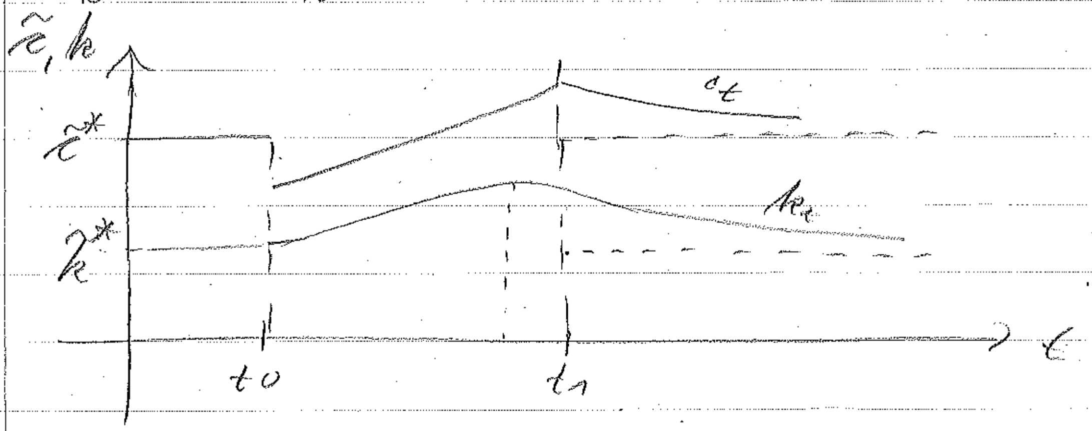
xx) Der altså en negativ substitutionseffekt på c_{t_0}.

e)





f)



(kun ned til punkt A

På tid t0 springer forbruget nedad, men
dog mindre end før, fordi skattesænkningen
kun er midlertidig. I tidsinter –

vallet (t_0, t_1) gælder den til E' knyttede knyttede dynamik. Bevægelsesretningen er derfor først nordøst, men efter at have passeret $\dot{\tilde{k}}=0$-kurven bevæger økonomien sig mod nordvest indtil tidspunkt t_1, hvor økonomien ligger præcis er nået til den nye saddelbane. I tidsintervallet (t_1, ∞) hvor den E knyttede gamle dynamik igen gælder, bevæger økonomien sig nu gradvis tilbage mod den gamle steady state, E.

Den økonomiske fortolkning af springet ved på tidspunkt t_0 er analog til den forrige, men da skattesænkningen kun er midlertidig er faldet i k_0 mindre end før. Men da der trods alt er et forbrugsfald, bliver opsparingen stor nok til at $\tilde{k}$ stiger omend mindre end før; $\tilde{c}$ vedbliver at stige i hele tidsintervallet (t_0, t_1), hvilket skyldes at $(1-\tilde{\tau}) r_t > \rho + \theta g$. Det bevirker, at $\tilde{c}$ når at passere niveauet $f(\tilde{k}) - \delta - (\delta+g+n)\tilde{k}$ før tidspunktet t_1 hvorved økonomien i den sidste del af tidsintervallet (t_0, t_1) får aftagende $\tilde{k}$ pga. det høje $\tilde{c}$.

Hvordan er A bestemt? A er bestemt ud fra, at der ikke kan være nogen _forventet diskontinuitet_ i $\tilde{c}$ på tidspunkt t_1, da det ville være i strid med princippet om forbrugsudjævning i en optimal plan.

A er altså bestemt som det punkt på $\tilde{k} = \tilde{k}^{**}$-linien, hvorfra det i den nye, midlertidige dynamik tager præcis $t_1 - t_0$ tidsenheder at nå op på den til den gamle, og efter t_1 igen gældende, dynamik svarende saddelbane, hvilket sker i punktet C.

4a) Falsk, da ethvert alternativt teknisk muligt forløb vil kræve, der er nogle perioder, i hvilke der er lavere forbrug.

b) Falsk. Da θ er forskellig, er $\tilde{k}^*$ forskellig, jfr. opg. 2.

$$y_t = \tilde{y}_t T_t = f(\tilde{k}_t) T_t$$

På langt sigt $y_t = f(\tilde{k}^*) T_t$

To forskellige lande med θ_1 og $\theta_2 \neq \theta_1$:

$$\frac{y^1_t}{y^2_t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{f(\tilde{k}^{*1})}{f(\tilde{k}^{*2})} \neq 1$$

Tilføjelse: $\theta \uparrow \Rightarrow \tilde{k}^* \downarrow$