Dynamisk Økonomi projektopgave 1

Afleveres 28/10–04 senest 14.30 hos Mette B. Jensen i 04.3.01

Dette projekt tager udgangspunkt i noterne af Mich Tvede, som indfører de modeller og begreber, der anvendes i opgaven. I besvarelsen af opgaven må der altid gerne henvises til relevante dele af noterne.

Opgave 1

Formålet med denne opgave er at analysere en speciel nyttefunktion.

Betragt en OG økonomi, hvor $X_t = \mathbb{R}^2_{++}$, $\omega_t \in X$, og alle forbrugere $t \in \mathbb{Z}$ har samme nyttefunktion, nemlig det harmoniske gennemsnit

$$u(x^y, x^o) = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{1}{x^y} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^o}}. \tag{1}$$

a) Vis at der findes en voksende transformation af nyttefunktionen, så den kommer på CES-formen $-1/x^y - 1/x^o$.

I det følgende arbejder vi videre med nyttefunktionen udtrykt ved (1).

b) Vis at nyttefunktionen er homogen af første grad: for alle $x \in X$ og $c \in \mathbb{R}_{++}$ gælder $u(cx) = cu(x)$. Vis også at $u(t,t) = t$ for alle $t \in \mathbb{R}_{++}$.

c) Find $Du(x)$ og $D^2u(x)$ og begrund at (A.3), (A.4) og (A.5) er opfyldt.

d) Vis at for alle $b > 0$ er indifferenskurven $u(x) = b$ beskrevet ved ligningen

$$\left(x^y - \frac{b}{2}\right)\left(x^o - \frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{4}.$$

Tegn nogle indifferenskurver — når en givet indifferenskurve ud til akserne i $\mathbb{R}^2_{++}$? Begrund at (A.6) er opfyldt.

e) Vis at for alle $x \in X$ er den foretrukne mængde $P(x)$ lig med en hyperbelmængde $S_H(a,q)$, og bestem a som funktion af x når du vælger $q = Du(x)$.

f) Ved anvendelse af korollar 3.17, opskriv række-kriteriet for om en givet allokering $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ er (ordinært) efficient.

Opgave 2

Formålet med denne opgave er at se på en OG-økonomi i vækst.

Betragt en OG økonomi, hvor $X_t = \mathbb{R}^2_{++}$, og alle forbrugere $t \in \mathbb{Z}$ har samme nyttefunktion u, som er homogen af grad 1, og altså opfylder $u(cx) = cu(x)$ for alle $x \in X$ og $c \in \mathbb{R}_{++}$. For et fastholdt $\bar{\omega} \in X$ og $A \in \mathbb{R}_{++}$ er ressourcerne givet ved $\omega_t = A^t\bar{\omega}$. Det antages at nyttefunktionen opfylder (A.3)–(A.6), således at økonomien opfylder (A.1)–(A.6). Lad $f(r, \omega)$ betegne efterspørgselsfunktionen udledt fra u, i henhold til definition 1.9.

Det kan ret let vises, at Du er homogen af grad 0, så $Du(cx) = Du(x)$ for alle $x \in X$ og $c \in \mathbb{R}_{++}$. Ligeledes kan det let vises, at den foretrukne mængde er homogen af grad 1, $P(cx) = cP(x)$ for alle $x \in X$ og $c \in \mathbb{R}_{++}$. Disse egenskaber tages for givet.

a) Vis, at det marginale substitutionsforhold er homogent af grad 0, så $\rho(cx) = \rho(x)$ for alle $x \in X$ og $c \in \mathbb{R}_{++}$.

b) Begrund, at efterspørgselsfunktionen er homogen af grad 1 i ω, så $f(r, c\omega) = cf(r, \omega)$ for alle $x \in X$ og $c \in \mathbb{R}_{++}$.

I økonomien med vækst vil vi omdefinere steady state. Vi starter med allokeringer: En allokering $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ er en *steady state allokering med vækst,* hvis der findes et fastholdt $\bar{x} \in X$ således at $x_t = A^t\bar{x}$.

c) Begrund, at opnåelighed (markeds-clearing) af en steady state allokering betyder at $A\bar{x}^y + \bar{x}^o = A\bar{\omega}^y + \bar{\omega}^o$.

d) Vis, at i en steady state allokering er $\rho(x_t) = \rho(\bar{x})$.

Vi er nu klar til at definere en steady state ligevægt: En *steady state ligevægt med vækst* er en relativ pris $\bar{r} > 0$ og en steady state allokering beskrevet ved $\bar{x}$, således at $\bar{x} = f(\bar{r}, \bar{\omega})$.

e) Vis, at i en steady state ligevægt med vækst er $x_t = f(\bar{r}, \omega_t)$, og forklar hvorfor dette skulle ønskes af definitionen.

f) Begrund, at Walras' lov giver sammenhængen $\bar{r}\bar{x}^y + \bar{x}^o = \bar{r}\bar{\omega}^y + \bar{\omega}^o$.

g) Med anvendelse af c) og f), udled parallelt med Theorem 4.5, at $\bar{r} > 0$ hører til en steady state ligevægt med vækst, hvis og kun hvis $\bar{r} \in \{\rho(\bar{\omega}), A\}$.

h) Betragt en steady state ligevægt med vækst. Begrund, at Theorem 1.23 giver eksistensen af $\alpha, \beta > 0$, således at $S_H(\beta, \bar{r}, 1) \subseteq P(\bar{x}) \subseteq S_H(\alpha, \bar{r}, 1)$. Vis derpå, at homogenitet af grad 1 giver $S_H(\beta_t, \bar{r}, 1) \subseteq P(x_t) \subseteq S_H(\alpha_t, \bar{r}, 1)$, hvor $\alpha_t = A^{-t}\alpha$ og $\beta_t = A^{-t}\beta$.

i) Vis, at en steady state ligevægt med vækst, defineret ved $\bar{r} > 0$, er (ordinært) efficient hvis og kun hvis $A \leq \bar{r}$.

j) Beskriv de re-allokeringer, der kan forbedre ligevægten hvor $\bar{r} = \rho(\bar{\omega})$, når $A > \rho(\bar{\omega})$.