Ugeseddel 10

Regnes inden øvelserne 5/5, 2003.

Opgave 1

Givet mængder $J \subseteq \mathbb{R}^S$, $K \subseteq \mathbb{R}^L$, og en funktion $f : K \times J \to \mathbb{R}$. For ethvert $q \in J$ betragtes maksimeringsproblemet $\max_{x \in K} f(x, q)$. Lad $x^*(q) \subseteq K$ være mængden af løsninger til dette problem, og lad $g(q) \in \mathbb{R}$ være den maksimale værdi der antages.

a) Bevis **Maksimumssætningen:** Antag at f er en kontinuert funktion i parret (x, q) og at K er kompakt. Så er x^* og g fra maksimeringsproblemet veldefinerede, x^* er opad hemikontinuert i q, og g er kontinuert i q.

Vink: Til beviset for at x^* er u.h.c. kan hentes inspiration i bogens bevis for proposition 3.AA.1. For kontinuiteten af g, lad en følge $q^n \to q$ og vis $g(q^n) \to g(q)$ ved modstrid.

Opgave 2

En funktion $f : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ er givet. Vi skriver $f(x, q)$, hvor $x \in \mathbb{R}^L$ og $q \in \mathbb{R}^S$. Vi er interesserede i maksimeringsproblemet $g(q) = \max_{x \in K} f(x, q)$. Vi vil fokusere på et bestemt $q' \in \mathbb{R}^S$ og antage at:

1. K er kompakt og f er kontinuert
2. For alle q nær q': maksimeringsproblemets løsning $x^*(q)$ er entydig
3. Den partielle afledede $D_q f(x, q')$ findes og er kontinuert i x.

a) Vis at $x^*(q)$ er en kontinuert funktion ved q'.
Vink: Benyt maksimumssætningen og Theorem M.H.1.

b) Vis denne version af indhylningssætningen, ved at henvise til det tilsvarende resultat fra ugeseddel 4, opgave 2: Givet antagelserne 1–3 er funktionen g differentiabel ved q' med $Dg(q') = D_q f(x^*(q'), q')$

c) Gør rede for forskellen imellem dette resultat og resultatet fra ugeseddel 4.

Opgave 3

Bevis proposition 17.C.2.

Opgave 4

På side 586, i bevisets trin 1, defineres en korrespondance f, vi nu vil se nøjere på.

For givet vektor $z \in \mathbb{R}^L$ kan vi se på problemet at maksimere $q \cdot z = q_1 z_1 + \ldots + q_L z_L$ over alle $q \in \Delta = \{q \in \mathbb{R}^L_+ \mid q_1 + \ldots + q_L = 1\}$. Dvs. vi forestiller os at overskudsfterspørgslen er z, og så ønsker vi at maksimere dennes værdi ved at vælge priser.

a) Antag at $L = 2$. Vis at hvis $z_1 > z_2$, så er $q_1 z_1 + (1 - q_1) z_2$ voksende i q_1. Konkludér, at det da er optimalt at vælge $q = (q_1, q_2) = (1, 0)$. Vis tilsvarende, at hvis $z_1 < z_2$ så er $q = (0, 1)$ optimal. Vis endelig, at hvis $z_1 = z_2$ så er alle $q \in \Delta$ lige gode.

b) Lad nu $L \geq 1$ være vilkårlig. Eftervis bogens påstand, at de optimale q netop er de $q \in \Delta$ som opfylder:

$$q_\ell = 0 \text{ hvis } z_\ell < \max\{z_1, \ldots, z_L\}.$$

Opgave 5

a) Lad $\varphi : S \to T$ og $\psi : S \to T$ være opad hemikontinuerte korrespondancer. Definér $\Gamma = \varphi \cup \psi$ ved $\Gamma(x) = \varphi(x) \cup \psi(x)$ for alle $x \in S$ og vis at $\Gamma : S \to T$ er opad hemikontinuert.

b) Lad $\varphi : S \to T$ og $\psi : T \to Z$ være opad hemikontinuerte korrespondancer. Definér $\Gamma = \psi \circ \varphi : S \to Z$ ved

$$\Gamma(x) = \{z \in Z \mid \exists y \in \varphi(x) : \ z \in \psi(y)\} \text{ for alle } x \in S$$

Antag, at T er kompakt, og vis at $\Gamma : S \to Z$ er opad hemikontinuert.

c) Lad $\varphi : S \to T$ og $\psi : S \to Z$ være opad hemikontinuerte korrespondancer. Definér $\Gamma = \varphi \times \psi$ ved $\Gamma(x) = \varphi(x) \times \psi(x)$ for alle $x \in S$ og vis at $\Gamma : S \to T \times Z$ er opad hemikontinuert.