Mikro Opgavesæt 3

Regnes til øvelserne 10–11/4

Opgave 1

En forbrugers differentiable efterspørgselsfunktion for gode 1 er $x_1(p_1, p_2, m)$.

a) Definér ved hjælp af denne funktions partielle afledte, hvad det vil sige at gode 1 er hhv. normalt, inferiørt, sædvanligt og Giffen.

b) Definér ligeledes hvad det vil sige at gode 1 er bruttosubstitut hhv. bruttokomplement for gode 2.

Opgave 2

En forbrugers efterspørgselsfunktion for gode 1 er på formen $x_1(p_1, p_2, m) = am/p_1$ hvor $a \in (0, 1)$ er en parameter.

a) Hvilke præferencer giver anledning til denne type efterspørgsel?

b) Afgør om gode 1 er normalt eller inferiørt, sædvanligt eller Giffen, bruttosubstitut eller bruttokomplement for gode 2.

Opgave 3

En forbrugers efterspørgselsfunktion for gode 1 er på formen

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{p_1^{1/(c-1)}}{p_1^{c/(c-1)} + p_2^{c/(c-1)}} m$$

hvor $c < 1$ og $c \neq 0$.

a) Kender du en nyttefunktion, der giver anledning til denne type efterspørgsel?

b) Vis at

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} = \frac{-p_1^{2/(c-1)} + \frac{1}{c-1} p_1^{(2-c)/(c-1)} p_2^{c/(c-1)}}{\left[p_1^{c/(c-1)} + p_2^{c/(c-1)}\right]^2} m$$

c) Afgør om gode 1 er normalt eller inferiørt, sædvanligt eller Giffen, bruttosubstitut eller bruttokomplement for gode 2.

Opgave 4

Denne opgave præsenterer et matematisk resultat på en intuitiv måde. Resultatet vil blive bevist mere formelt på 2. år af studiet.

Der er givet en differentiabel funktion $f(x, a)$. Vi betragter $x \in \mathbb{R}$ som en endogen variabel, der skal maksimeres over, og $a \in \mathbb{R}^n$ som en eksogen parameter. Vi ser altså på problemet $\max_x f(x, a)$. Antag nu, at for enhver værdi af a findes der en entydig løsning $x^*(a)$ på problemet. Den maksimalt opnåede værdi er da $F(a) = \max_x f(x, a) = f(x^*(a), a)$.

a) Opskriv førsteordensbetingelsen for maksimeringsproblemet $\max_x f(x, a)$.

b) Forudsæt nu, at x^* er differentiabel i a (der kendes tilstrækkelige betingelser herfor, men dem springer vi over). Differentiér udtrykket $f(x^*(a), a)$ i a_n og udnyt førsteordensbetingelsen til at bevise

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a_n} = \frac{\partial f(x^*(a), a)}{\partial a_n}$$

Dette resultat kaldes indhylningssætningen eller envelope theorem. Det siger løst sagt, at når man skal differentiere $F(a) = \max_x f(x, a)$ kan man tillade sig at glemme max-operationen.

Opgave 5

Betragt en forbruger, der skal maksimere sin nytte givet priser og indkomst (p_1, p_2, m). Vi opfatter (p_1, p_2, m) som en eksogen parameter i $\mathbb{R}^3$, og vi skal anvende resultatet fra opgave 4 på forbrugerens problem. Idet forbrugeren vil udnytte hele sit budget, kan forbrugerens problem opskrives som

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m - p_1 x_1}{p_2}\right)$$

Løsningen er $x_1(p_1, p_2, m)$, og forbrugerens maksimalt opnåede nytte betegnes $U(p_1, p_2, m)$.

a) Idet du går ud fra at alting er så differentiabelt som nødvendigt, find udtryk for $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial p_1$, $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial p_2$ og $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial m$.

b) Vis at

$$x_1(p_1, p_2, m) = -\frac{\partial U(p_1, p_2, m)/\partial p_1}{\partial U(p_1, p_2, m)/\partial m}$$

og udled et tilsvarende udtryk for $x_2(p_1, p_2, m)$.

c) Antag i dette delspørgsmål, at værdien af $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial m$ ikke afhænger af p_1. Da siger formlen i b), at $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial p_1$ er proportional med $x_1(p_1, p_2, m)$ når p_2 og m holdes fast. Argumentér da for, at ved en prisændring fra p_1' til p_1'' kan $-\int_{p_1'}^{p_1''} x_1(p_1, p_2, m)\, dp_1$ opfattes som et udtryk for forbrugerens nytteændring.

d) Forklar sammenhængen imellem Varians figur 14.3 og resultatet af del c).

e) Generelt kan $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial m$ afhænge af p_1. Begrund da, at $-\int_{p_1'}^{p_1''} x_1(p_1, p_2, m)\, dp_1$ næppe er et korrekt udtryk for nytteændringen.

Opgave 6

En forbruger har kvasilineære præferencer, med nyttefunktion $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$. Vi vil i denne situation tillade $x_2 \in \mathbb{R}$ mens vi som så ofte kræver $x_1 \geq 0$.

a) Antag af præferencerne er strengt konvekse, og find førsteordensbetingelsen, der karakteriserer løsningen på forbrugerens problem. Argumentér for at $x_1(p_1, p_2, m)$ er uafhængig af m og at $x_2(p_1, p_2, m) = f(p_1, p_2) + m/p_2$ for en passende funktion f.

b) Lad $U(p_1, p_2, m)$ betegne den maksimale nytte, der opnås ved løsning af forbrugerens problem. Vis at $U(p_1, p_2, m) = g(p_1, p_2) + m/p_2$ for en passende funktion g.

c) Begrund at $\partial U(p_1, p_2, m)/\partial m$ er konstant i p_1. Gå tilbage til opgave 5, og konkludér at med kvasilineære præferencer er $-\int_{p_1'}^{p_1''} x_1(p_1, p_2, m)\, dp_1$ et korrekt udtryk for nytteændringen ved prisændringen fra p_1' til p_1''. Kommentér Varians afsnit 14.6 på denne baggrund.